אלגוריתם הסתברותי לבעיית ה- $min - cut$

הקלט לבעיית ה- $min-cut$ הוא גרף $G = \langle V, E\rangle$. הפלט הרצוי הוא חלוקה $V = A \cup B$ כך שמס' הצלעות

$$e(A,B) = |\{x \in A, y \in B : (x,y) \in E\}|$$

הוא מזערי.

ניתן לפתור את הבעייה ע"י כך שנבחר קדקד אחד קבוע $x \in V$ ונעבור עם קדקד שני y על כל הקדקדים האחרים ב- $V \setminus \{x\}$. לכל בחירה כזו של y נחשב את הזרימה המירבית בין x ל y ברשת המתקבלת. בפרט נקבל גם את גודלו של החתך המזערי בין x לy. נמזער ע"פ כל הבחירות האפשריות של $y \neq x$ ונקבל את התשובה הרצויה.

עתה נציג אלגוריתם אחר, שונה באופן מהותי שהוצע ע"י . בעחוע.

נזכיר שאם u, v קדקדים שכנים בגרף ואם $e = (u,v)$ אז הגרף המתקבל מכיווץ הצלע e הוא גרף שממנו הושמטו הקדקדים u, v ונוסף במקומם קדקד חדש z. קב' השכנים של z כוללת כל קדקד השכן לu ול v. במקרה שלנו, אף כי G המקורי הוא גרף, בהמשך האלגוריתם יהיה לנו <u>מולטיגרף</u> שמותרות בו צלעות מקבילות וההגדרה של פעולת הכיווץ תעודכן בהתאם. כך אם יש a צלעות בין הקדקדים u וx ו-b צלעות בין v ל- x אז כשמכווצים את הקדקדים השכנים u, v לקדקד z אז מס' הצלעות בין z ל x (לאחר הכיווץ) הוא $a + b$. מאידך גיסא במולטיגרפים שלנו אין לולאות. עתה נוכל להציג את האלגוריתם.

אלגורתים $Contract$ מדי צעד בחר באקראי ובהתפלגות אחידה אחת הצלעות $e = (u,v)$ ב (מולטי) גרף הנוכחי. כווץ את e. המשך עד שמס' הקדקדים שבגרף יורד ל- 2. החלוקה המושרית על קדקדי V היא החתך המתקבל.

הסבר: בכל שלב של התהליך מושרית חלוקה של $V(G)$: כל הקדקדים שכווצו לקדקד נוכחי ב(מולטי) גרף מהווים חלק. בפרט, כשנותרים רק שני קדקדים z_1, z_2 ניתן לזהות לגבי כל קדקד $x \in G$ האם הוא כווץ ל- z_1 או ל-מ z_2 . בהתאם לזה מחלקים את קבוצת הקדקדים של G לשני חלקים ומקבלים חתך.

טענה 1: יהיה $V = A \cup B$ חתך אופטימלי ב- G , אז ההסתברות שאלגוריתם $Contract$ יגיע אליו היא $\leq 1/n^2$.

מכאן מתקבל עתה אלגוריתם הסתברותי יעיל למציאת חתך מינימלי.

משפט: אם מבצעים אלגוריתם $Contract$ באופן בלתי תלוי $cn^2 \log n$ פעמים, ובוחר-ים את הקטן מבין החתכים המתקבלים, אז ההסתברות לטעות קטנה מ- n^{-c} .

הוכחה: נקבע שוב חתך אופטימלי אחד מסויים. ההסתברות להחמיצו בריצה אחת של $Contract$ היא כאמור $\geq 1 - 1/n^2$ ולכן ההסתברות שיוחמץ בכל אחד מבין $cn^2 \log n$ ריצות ב"ת היא לכל היותר

$$(1 - \frac{1}{n^2})^{cn^2 \log n} \leq n^{-c},$$

כפי שטענו.

נשוב להוכחת טענה 1. ושוב יהיה $V = A \cup B$ חתך צלעי מינימלי, נאמר בעל $k = e(A, B)$ צלעות. שימו לב שהריצה של $Contract$ מסתיימת בחתך המסויים הזה אם"ם באף אחד מצעדי הכיווץ איננו בוחרים בצלע מ- $E(A, B)$.
מהי ההסתברות לכך שהבחירה הראשונה שלנו מקיימת תנאי זה?

למה: יהיה H מולטי גרף בעל v קדקדים ויהיה $V(H) = P \cup Q$ חתך צלעי מינימלי ב H . נבחר באקראי צלע ב H . ההסתברות שהצלע הנבחרת שייכת ל $E_H(P, Q)$ היא $\frac{2}{v} \geq$.

הוכחה: יהיה $\gamma = e(P, Q)$: מס' הצלעות בין P ל Q (שימו לב - זוהי גם הקשירות הצלעית של H). מכיוון שאנו בוחרים באופן אחיד הטענה אומרת, בעצם, שב H יש לפחות $\frac{\gamma v}{2}$ צלעות. ואכן אם γ היא הקשירות הצלעית של H אז לכל קדקד x יש דרגה $d_H(x) \geq \gamma$. כאשר מסכמים ע"פ כל הקדקדים, מקבלים

$$2e(H) = \sum_{x \in V(H)} d_H(x) \geq \gamma \cdot v,$$

כדרוש.
עתה נוכל להשלים את הוכחת הטענה. נשים לב שכל עוד לא נבחרת צלע מן החתך A, B (האופטימלי בגרף המקורי), הוא נשאר החתך האופטימלי גם במולטי גרפים הנוצרים בהמשך. ע"פ הטענה יוצא שההסתברות לכך ש(A, B) ייבחר כלומר שאף פעם לא נבחר באקראי צלע מ$E(A, B)$ היא לכל היותר

$$(1 - \frac{2}{n})(1 - \frac{2}{n-1}) \ldots = \frac{2}{n(n-1)},$$

וזה לפי הטענה הנ"ל. (שימו לב שמדי איטרציה יורד מס' הקדקדים בגרף ב- 1).