מטרואידים

10 בנובמבר 2009

נזכיר תחילה שמשפחה של קבוצות $\mathcal{F}$ נקראת משפחה תורשתית, אם לכל $A \in \mathcal{F}$ ולכל $B \subseteq A$, גם $B \in \mathcal{F}$. כעת ניתן לנסח את הבעייה הכללית:
נתונה משפחה תורשתית $\mathcal{F}$ של תת-קבוצות מתוך $[n]$, ופונקצית משקל $w : [n] \to \mathbf{R}^+$ על האיברים. מצא קבוצה באוסף שמשקלה מירבי. לאילו משפחות מובטח שהאלגוריתם החמדן יצליח (לכל פונקצית משקל)?

לצורך התשובה, עלינו להגדיר מושג חדש: תהיה $\mathcal{F}$ משפחה תורשתית של תת קבוצות של $[n] = \{1, \ldots, n\}$. אומרים ש-$\mathcal{F}$ היא אוסף הקבוצות הבלתי תלויות של מטרואיד, אם היא מקיימת את אקסיומת ההחלפה דהיינו, אם $A, B \in \mathcal{F}$ ואם $|B| > |A|$, אז יש איבר $x \in B \setminus A$ כך ש: $A \cup \{x\} \in \mathcal{F}$

להלן התשובה: למשפחה התורשתית $\mathcal{F}$ יש התכונה שהאלגוריתם החמדן מצליח לכל פונקציית משקל w אם"ם $\mathcal{F}$ הוא אוסף הקבוצות הבלתי תלויות של מטרואיד.

הכרחיות (רעיון ההוכחה): אם יש קבוצות $A, B \in \mathcal{F}$ המפרות את אקסיומת ההחלפה, נגדיר פונקציה w כדלקמן: אם $x \in A$, אז $w(x) = 1$. אם $x \in B \setminus A$, אז $w(x) = 1 - \epsilon$ כאשר $\epsilon > 0$ קטן דיו. בכל מקרה אחר $w = 0$. קל לראות שהבחירה האופטימלית (אם ϵ מספיק קטן) היא B ומאידך האלגוריתם החמדן יבחר באיברי A בזה אחר זה ולא יוכל להמשיך אח"כ.

מספיקות (הרעיון): ניתן להגדיר במסגרת תורת המטרואידים מושג אנלוגי למעגל בגרפים. "מעגל" בהקשר זה, זו קבוצה C שאינה ב-$\mathcal{F}$ ומינימלית בתנאי זה. כלומר, $C \notin \mathcal{F}$ אולם לכל $x \in C$ מתקיים: $C \setminus x \in \mathcal{F}$. בעזרת מושג זה ומספר תכונות פשוטות שלו שמוכיחים, ניתן לחזור, באופן מילולי על ההוכחה שהראינו לבעיית העץ הפורש ולבעיית התזמון של משימות באורך יחידה.

לא קשה להראות שאם E קב' הצלעות של הגרף G ואם מגדירים $A \in \mathcal{F}$ אם"ם A אינה מכילה מעגל, אז $\mathcal{F}$ אוסף הקבוצות הב"ת של מטרואיד ("המטרואיד הגרפי של G").

ניתן גם להראות שאם S קב' סופית של וקטורים ואם $\mathcal{F}$ כוללת כל תת-קבוצה של S שהיא בלתי תלויה ליניארית, אז $\mathcal{F}$ אוסף הקבוצות הב"ת של מטרואיד ("מטרואיד ליניארי"). זה היה גם מקור ההשראה להגדרת מושג המטרואיד.

יהיה $G = (V, E)$ גרף וכמקודם נגדיר $A \in \mathcal{F}$ אם אינה כוללת מעגל. במילים אחרות, אם הגרף (V, A) הוא יער. ברור ש- $\mathcal{F}$ תורשתית. רוצים להראות ש-$\mathcal{F}$ היא אוסף הקבוצות הב"ת של מטרואיד, כלומר שהיא מקיימת את אקסיומות ההחלפה. ניתן לעשות זאת בשתי דרכים:

א. להראות שמדובר במטרואיד ליניארי ואז אקסיומת ההחלפה נובעת מאלגברה ליניארית.

ב. משיקול קומבינטורי ישיר.

סקירת הוכחה א': מביטים במטריצה M - מטריצת החילה של G. זו מטריצה ששורותיה מתאימות לאיברי V (הקדקדים) ועמודותיה לאיברי E (הצלעות). מוכיחים שקבוצה של צלעות $A \in \mathcal{F}$ אם"ם קבוצת העמודות המתאימה ב-M היא בלתי תלויה ליניארית מעל השדה עם שני איברים.

סקירת ההוכחה ב': תהיינה $A, B \in \mathcal{F}$ כש- $|A| > |B|$, ותהיה $e \in B \setminus A$. מתי ניתן להעביר את הצלע e ל- A כך ש- $A \cup \{e\}$ אינה כוללת מעגל? קל לראות שזהו המצב אם"ם e מחברת בין שני רכיבי קשירות שונים של היער (V, A) . נניח בה"כ ש- G קשיר ויש בו n קדקדים. שימו לב שאם $X \in \mathcal{F}$ אז לגרף (V, X) יש $n - |X|$ רכיבי קשירות. יהיו, אם כן, $U_1, \ldots, U_k$ רכיבי הקשירות בגרף (V, A) ויהיו $u_i = |U_i|$ העוצמות שלהם. נשים לב כי $\sum u_i = n$ וכאמור $k = n - |A|$. על מנת שצלע $f \in B$ תיפסל מלהתאים לאקסיומת ההחלפה, כלומר על מנת ש- $A \cup \{f\} \notin \mathcal{F}$, הכרחי ששני הקדקדים של f נמצאים באחת הקב' הנ"ל. מכיוון שגם (V, B) הוא יער, מס' הצלעות כנ"ל אינו עולה על $u_i - 1$.

יוצא שמספר הצלעות $f \in B$ שאינן מקיימות את אקסיומת ההחלפה, אינו עולה על

$$\sum_1^k (u_i - 1) = n - k = |A|$$

ואולם $|A| < |B|$ ולכן יש לפחות צלע אחת המחברת בין שני רכיבי קשירות שונים, נאמר U_i, U_j. את הצלע הזו ניתן לצרף ל- A בלי לסגור מעגל, כנדרש.