מערכות שלמות – Universal Systems

ראינו שכל פונקציה בוליאנית ניתנת למימוש ע"י סכום מכפלות ו/או מכפלת סכומים. לכן כל פונקציה בוליאנית ניתנת למימוש ע"י קבוצת האופרטורים **{NOT, AND, OR}**.

הגדרה: קבוצת אופרטורים הנה שלמה אם כל פונקציה בוליאנית ניתנת למימוש בעזרת הפעלות של אופרטורים מהקבוצה בלבד על משתני הפונקציה.

מסקנה: {NOT,AND,OR} היא קבוצה שלמה.

• טענה: א. {NOT, OR} היא שלמה.

ב. {NOT, AND} היא שלמה.

הוכחה: (של א)

תהי F פונקציה כלשהי. ראשית נציג את F בעזרת ’,+,* (המהווים מערכת שלמה) בלבד. כעת נמיר כל שימוש באופרטור * בשימוש ב- ’,+ בלבד, באופן הבא:

אם F מכילה ביטויים מהצורה G*Q נחליף אותם ב-

$G*Q = ((G*Q)')' = (G'+Q')'$.

(הוכחת ב נעשית באופן דומה).

NOR ו- NAND מערכות שלמות

NAND: מכיוון ש - {NOT, AND} היא שלמה מספיק להראות כי ניתן לממש את AND ו-NOT ע"י NAND בלבד:

$$X' = (X \bullet X)' = NAND(X,X)$$

$$A \bullet B = ((A \bullet B)')' = (NAND(A,B))' = NAND(NAND(A,B),NAND(A,B))$$

מסקנה: {NAND} היא מערכת שלמה.

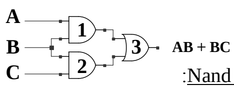
NOR: מכיוון ש - {NOT, OR} היא שלמה מספיק להראות כי ניתן לממש את OR ו-NOT ע"י NOR בלבד:

$$X' = (X + X)' = NOR(X,X)$$

$$A + B = ((A + B)')' = (NOR(A,B))' = NOR(NOR(A,B),NOR(A,B))$$

מסקנה: {NOR} היא מערכת שלמה.

פישוט מעגלי NOR/NAND

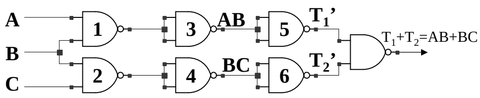


מימוש ע"י Nand:

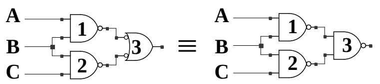
$$T_1 \triangleq AB = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$$

$$T_2 \triangleq BC = (B \uparrow C) \uparrow (B \uparrow C)$$

$$T_1 + T_2 = (T_1' \cdot T_2')' = (T_1 \uparrow T_1) \uparrow (T_2 \uparrow T_2)$$



שערים 3+5 מבטלים זה את זה, וכן גם 4+6. ניתן להגיע לאותה דרגת פישוט גם בדרך הבאה:



פישוט פונקציות בעזרת מפות קרנו (Karnaugh)

טבלה של שני משתנים:

x \ y	0	1
0	x’y’	x’y
1	xy’	xy

	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

דוגמה: $f = m_1+m_2+m_3$

x \ y		y
	0	1
x	1	1

מסקנה מהטבלה: $f = x+y$

טבלה של שלושה משתנים:

x \ yz	00	01	11	10
0	x’y’z’	x’y’z	x’yz	x’yz’
1	xy’z’	xy’z	xyz	xyz’

	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

* כל שני ריבועים סמוכים במפה נבדלים במשתנה אחד בלבד.

$m_2 + m_6 \equiv x'yz' + xyz' \equiv yz'$

דוגמה:

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	1	1

1. z’
2. xy

$\Leftarrow$ $f=z' + xy$

(סכום מכפלות: $f = x'y'z' + xy'z' + xyz + xyz' + x'yz'$)

העיקרון: כדי לפשט את הפונקציה נחפש ריבועים מוכללים גדולים שיכסו את ה- 1ים.

פונקציה "פשוטה" $\Leftrightarrow$ ריבועים גדולים

דוגמה נוספת:

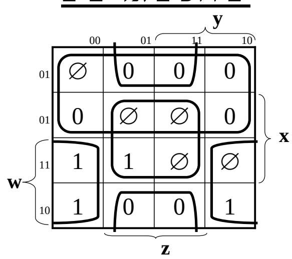
x \ yz	00	01	11	10
0	1 (0)	1 (1)	(3)	(2)
1	(4)	1 (5)	1 (7)	1 (6)

$f = x'y' + \underbrace{xz + xy}_{x(y + z)}$ → לא ניתן לפישוט ע"י מפת קרנו

$\boxed{f = \underbrace{x'y' + y'z}_{\boxed{y'(x'+z)}} + xy}$ → לא ניתן לפישוט ע"י מפת קרנו

$\Leftarrow$ הפישוט המינימלי לא תמיד יחיד

צירופים אדישים



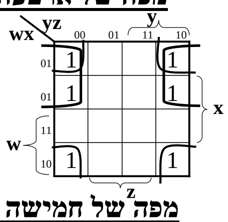
∅ ≡ "Don't Care" (ניתן להשים ל"1" או "0",
ואין הכרח שתהיה עקביות).

סכום מכפלות: $f = z'w + zx$

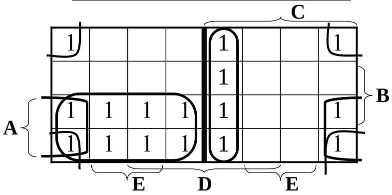
מכפלת סכומים: $f = w(z' + x)$

מפה של ארבעה משתנים:

$f=x'z' + w'z'$

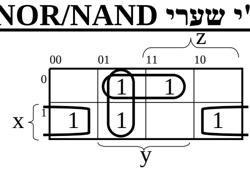


מפה של חמישה משתנים:



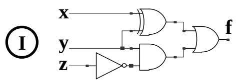
$f = AC' + AD'E' + CDE' + B'D'E'$

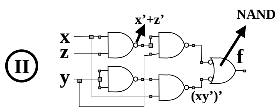
מימוש ע"י שערי NOR/NAND (II) :



$f = xy' + yz' + yx' \equiv (x \oplus y) + yz' \equiv y(x' + z') + xy'$

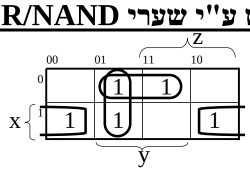
I II





מימוש ע"י שערי NOR/NAND

דוגמה:



$f = xy' + yz' + yx'$