אלגברה בוליאנית

האקסיומות:

* $B=\{0,1\}$ – קבוצה בת שני איברים

* שני אופרטורים: $(\vee, \text{OR}, +)$; $(\wedge, \text{AND}, \bullet)$

1. B סגורה ביחס ל- + ו- • .

2. א. קיים איבר ניטרלי ביחס ל- +

$$x+0 = 0+x = x$$

ב. קיים איבר ניטרלי ביחס ל- •

$$x\bullet 1 = 1\bullet x = x$$

3. חוק החילוף מתקיים הן ביחס ל- + והן ביחס ל- • :

$$x+y = y+x \qquad x\bullet y = y\bullet x$$

4. חוק הפילוג מתקיים הן ביחס ל- + והן ביחס ל- • :

$$x\bullet(y+z) = x\bullet y + x\bullet z$$

$$x+(y\bullet z) = (x+y) \bullet (x+z)$$

5. לכל איבר **x** ב- B קיים איבר משלים **x’ (not(x), ¬x)** ב- B כך ש-:

$$x+x' = 1$$

$$x\bullet x' = 0$$

הערות והארות:

* המבנה שהגדרנו איננו השדה מודולו 2:

-אין איבר נגדי ביחס ל- +

-חוק הפילוג מתקיים גם ביחס ל- + , לא רק ביחס ל- •

* אסוציאטיביות מתקיימת הן ביחס ל- + והן ביחס ל- • :

$$(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$$

$$(X\bullet Y)\bullet Z = X\bullet (Y\bullet Z)$$

אבל היא איננה אקסיומה כי ניתן לגזור אותה מתוך האקסיומות.

* כל האקסיומות מתקיימות אם מגדירים **+, •, '** באופן הבא:

AND

X	Y	X·Y
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

OR

X	Y	X+Y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

NOT

X	X’
0	1
1	0

הוכחת תכונות ומשפטים באלגברה בוליאנית

דוגמא לתכונה שנרצה להוכיח: לכל X ב- B $x\bullet x = x$.

* כדי להוכיח טענות נשתמש באקסיומות.

* ניתן להוכיח טענות גם ע"י רשימת הטבלה המתאימה (Brute Force).

במקרים רבים בהוכחת טענות נוח להיעזר בעיקרון הדואליות:

כל ביטוי נכון ניתן להחלפה בביטוי אחר, שגם הוא נכון, ע"י:

$$+ \Leftrightarrow \bullet$$

$$1 \Leftrightarrow 0$$

דוגמא: $x + 0 = x \quad\Leftrightarrow\quad x \bullet 1 = x$

(ניתן להוכיח את עקרון הדואליות בעזרת האקסיומות).

משפטים יסודיים

1) $x\bullet x = x \qquad x+x = x$

2) $x\bullet 0 = 0 \qquad x+1 = 1$

3) $(x')' = x$

4) אסוציאטיביות:

$$(x\bullet y)\bullet z = x\bullet(y\bullet z) \qquad (x+y)+z = x+(y+z)$$

5) כלל דה-מורגן:

$$(x\bullet y)' = x'+y'$$

$$(x+y)' = x'\bullet y'$$

6) כלל הצמצום:

$$x\bullet(x+y) = x \qquad x+(x\bullet y) = x$$

דוגמה להוכחת טענה:

נוכיח ש- $x+(x'\bullet y) = x+y$

הוכחה 1 (מתוך האקסיומות):

א. חוק הפילוג : $x+(x'\bullet y) = (x+x') \bullet (x+y)$

ב. כלל המשלים $(x+x' =1)$: $(x+x')\bullet(x+y) = 1\bullet(x+y)$

ג. איבר יחידה $(x\bullet 1 = 1\bullet x = x)$: $1\bullet(x+y) = x+y$

הוכחה 2 (brute force):

X	y	X’Y	X+(X’·Y)	X+Y
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

לעיתים בהוכחת טענות מסוימות נצטרך להיעזר באינדוקציה.

לדוגמה, בהוכחת כלל דה – מורגן המוכלל:

$$(X_1 + X_2 + .. + X_n)' = X_1'\cdot X_2' \ \ldots \cdot X_n'$$

$$(X_1 \cdot X_2 \cdot .. \cdot X_n)' = X_1' + X_2' + \ldots + X_n'$$

קדימות אופרטורים:

$$\overset{1}{\text{NOT}} \rightarrow \overset{2}{\text{AND}} \rightarrow \overset{3}{\text{OR}}$$

והקדימות העליונה היא לסוגריים ( ).

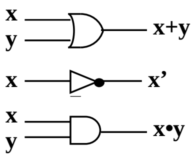
דוגמא: $x + y z' \equiv x + (y \bullet (z'))$

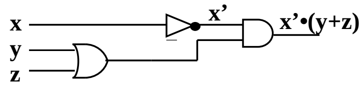
$$(x + y) z' \equiv (x + y) \bullet (z')$$

פונקציות בוליאניות

$f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

* פונקציה בוליאנית בעלת n משתנים.
* כל משתנה יכול להופיע, וכן גם שלילתו.
* הפונקציה מוגדרת ע"י טבלת האמת שלה, שהיא בעלת 2^n כניסות.
* ניתן לייצג פונקציה ע"י תרשים המורכב משערים לוגיים.





צורות סטנדרטיות להצגת פונקציות

כל פונקציה בוליאנית ניתנת לכתיבה הן כסכום מכפלות והן כמכפלת סכומים.

x	y	z	f	minterms גורם	minterms סימון	maxterms גורם	maxterms סימון
0	0	0	1	x'y'z'	m_0	x+y+z	M_0
0	0	1	0	x'y'z	m_1	x+y+z'	M_1
0	1	0	1	x'yz'	m_2	x+y'+z	M_2
0	1	1	1	x'yz	m_3	x+y'+z'	M_3
1	0	0	1	xy'z'	m_4	x'+y+z	M_4
1	0	1	0	xy'z	m_5	x'+y+z'	M_5
1	1	0	1	xyz'	m_6	x'+y'+z	M_6
1	1	1	1	xyz	m_7	x'+y'+z'	M_7

בהינתן טבלת אמת של פונקציה f:

1) נרשום את f כמכפלת סכומים ע"י לקיחת M_i עבורם f=0.

2) נרשום את f כסכום מכפלות ע"י לקיחת m_i עבורם f=1.

דוגמא לכתיבת פונקציה בצורה סטנדרטית:

x	y	z	f_1	f_2	
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	2
0	1	1	0	1	3
1	0	0	0	1	4
1	0	1	1	1	5
1	1	0	0	1	6
1	1	1	0	0	7

$$f_1 = m_2 + m_5 = x'yz' + xy'z \longrightarrow f_1 = \sum(2,5)$$

$$f_2 = M_1 \cdot M_7 = (x+y+z')(x'+y'+z') \to f_2 = \prod(1,7)$$

הרחבה לצורה סטנדרטית

$$\begin{aligned} f &= x' + xyz + y'z \\ &= x'(y+y') + xyz + (x+x')y'z \\ &= x'y + x'y' + xyz + xy'z + x'y'z \\ &= x'y(z+z') + x'y'(z+z') + xyz + xy'z + x'y'z \\ &= x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xy'z + \cancel{x'y'z} \\ &= x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xy'z \end{aligned}$$

(בדרך דומה ניתן להרחיב פונ' הניתנות בצורה של מכפלת סכומים).

המרה בין מכפלת סכומים וסכום מכפלות:

נניח כי $f = \sum(1,2,3,5,7)$ ורוצים לרשמה כמכפלת סכומים.

$$f' = m_0 + m_4 + m_6 \Leftrightarrow f' = \sum(0,4,6)$$

$$f = (f')' = \left(\sum(0,4,6)\right)' = \prod(m_0', m_4', m_6') = \prod(0,4,6)$$

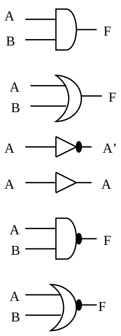
אופרטורים לוגיים נוספים:

יש $16 = 2^{(2^2)}$ פונקציות $f:\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

פונקציה	סמל	שם	הערות
$F_0=0$			
$F_1=xy$	X • Y	AND	
$F_2=xy'$	X/Y		
$F_3=x$			
$F_4=x'y$	Y/X		
$F_5=y$			
$F_6=xy'+x'y$	X⊕Y	XOR	
$F_7=x+y$	X+Y	OR	
$F_8=(x+y)'$	X↓Y	NOR	universal
$F_9=xy+x'y'$	X⊙Y	Equivalence	
$F_{10}=y'$			
$F_{11}=x+y'$			
$F_{12}=x'$			
$F_{13}=x'+y$			
$F_{14}=(xy)'$	X↑Y	NAND	universal
$F_{15}=1$			

שערים לוגיים ספרתיים:

שערים סטנדרטיים שנארזים בסיליקון.



F=A • B AND

F=A+B OR

F=A' Inverter

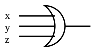
F=A Buffer

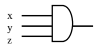
F=(A • B)'=A'+B' NAND

F=(A+B)'=A' • B' NOR

שערים מרובי כניסות

$$x+(y+z)=(x+y)+z=x+y+z \qquad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z=x\cdot y\cdot z$$

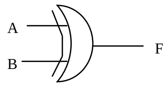




Semantics of **NOR**?

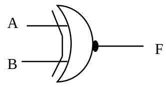
$$(x{\downarrow}y){\downarrow}z \neq x{\downarrow}(y{\downarrow}z)$$

$$\begin{aligned}&\left((x+y)'+z\right)' \\ &=(x+y)\cdot z' \\ &=xz'+yz'\end{aligned} \quad \neq \quad \begin{aligned}&\left(x+(y+z)'\right)' \\ &=x'\cdot(y+z) \\ &=x'y+x'z\end{aligned}$$



$F = XY' + X'Y = X \oplus Y$ **XOR** ↓ **eXclusive OR**

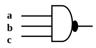
$(1 \Longleftrightarrow X<>Y)$



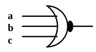
$F = XY + X'Y' = X \odot Y$ **Equivalence** ↓ **eXclusive NOR**

$(1 \Longleftrightarrow X==Y)$

שערי NOR/NAND מרובי כניסות:

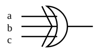


NAND (A,B,C) = (A*B*C)’



NOR (A,B,C) = (A+B+C)’

שערי XOR מרובי כניסות:



$$F=(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)=A\oplus B\oplus C$$