אביב 2003

מיתוג ומערכות ספרתיות - תרגיל כיתה מס׳ 4
מחברים, מחסרים ומשווים

1 מחברים

מעגלים המיועדים לחבר שתי ספרות בינריות (ביטים). כל עוד אחת הספרות המחוברות שונה מ-0 התוצאה ניתנת בספרה יחידה. אם שתי הספרות שוות ל-1 אזי התוצאה ניתנת בשתי ספרות, לספרה המשמעותית יותר קוראים <u>נשא</u> ואותה מחברים לזוג הספרות הבא בחשיבותו.

1.1 חצי מחבר

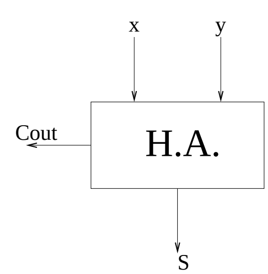
<u>כניסות</u> : x , y.
<u>יציאות</u> : C_{out} , S.
<u>חישוב</u> : מבצע $x+y$ התוצאה ניתנת ב-$S(\text{um})$ והנשא ב- $C_{out}(\text{arry})$.
<u>טבלת אמת</u>

x	y	S	C_{out}
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

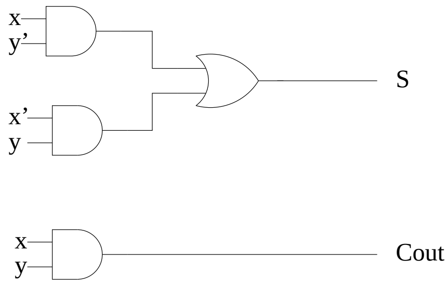
<u>הפונקציות</u> :

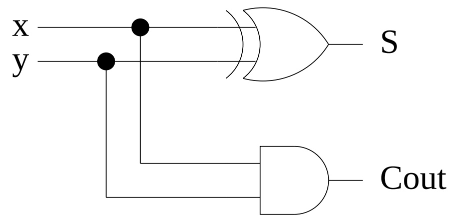
$$
\begin{aligned}
S &= x'y + y'x = x \oplus y \\
C_{out} &= xy
\end{aligned}
$$

<u>טענה</u> : $S + 2C_{out} = x + y$ כמספרים בבסיס 2.
<u>סימון</u> :



מימוש : המעגל השמאלי הינו המימוש בצורת סכום מכפלות, המעגל הימני עושה שימוש בשער





XOR.

1.2 מחבר מלא

<u>כניסות</u> : C_{in} , y , x.

<u>יציאות</u> : C_{out} , S.

<u>חישוב</u> : מבצע $x + y + C_{in}$ התוצאה ניתנת ב-S והנשא ב- C_{out}.

<u>טבלת אמת</u>

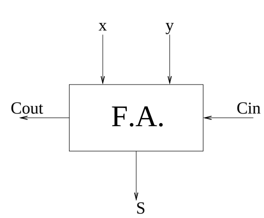
x	y	C_{in}	S	C_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

<u>הפונקציות</u> : ניתן לקבל אותן בעזרת מפות קרנו.

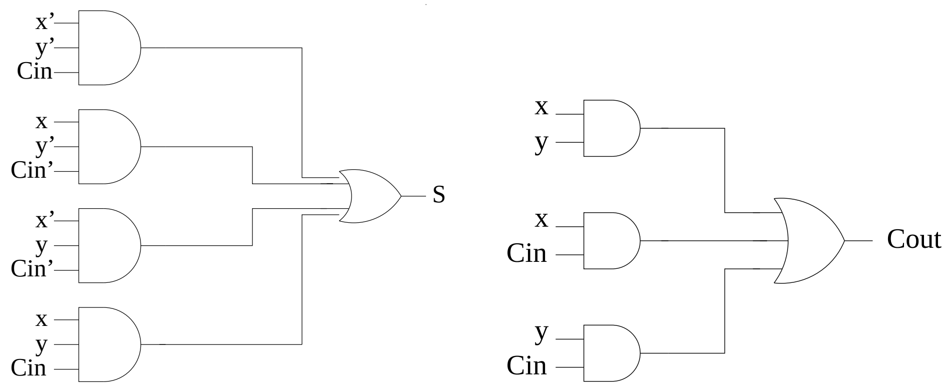
$$\begin{aligned} S &= xy'C'_{in} + x'yC'_{in} + x'y'C_{in} + xyC_{in} = x \oplus y \oplus C_{in} \\ C_{out} &= xy + xC_{in} + yC_{in} \end{aligned}$$

<u>טענה</u> : $S + 2C_{out} = x + y + C_{in}$ כמספרים בבסיס 2.

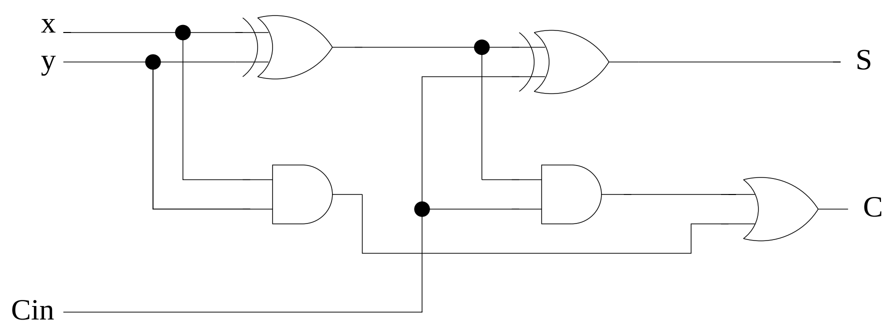
<u>סימון</u> :



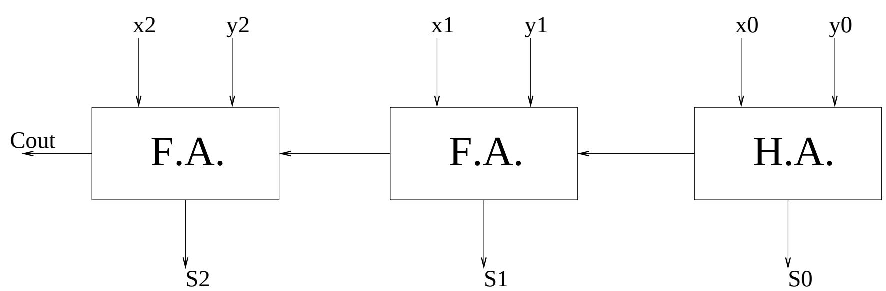
<u>מימוש</u> : המעגל השמאלי מממש את הסכום והמעגל הימני מממש את הנשא.



מימוש בעזרת שני .H.A ושער OR יחיד.



<u>שרשור מחברים</u> : לחבור מספרים בני שלושה ביטים.



2 מחסרים

מעגלים המיועדים לחסר שתי ספרות בינריות (ביטים). בניגוד למחברים אין סימטריה בין הארגומנטים. נחלק למקרים:

$$\begin{array}{c|ll} x \geq y & 0-0= & 0 \\ & 1-0= & 1 \\ & 1-1= & 0 \\ \hline x<y & 0-1= & -1 \end{array}$$

במקרה האחרון עלינו לשאול ביט שערכו 1 מהעמודה הבאה בחשיבותה, ולהוסיף $2=(10)_2$ לתוצאה. ולכן נזדקק לשתי יציאות, אחת עבור התוצאה (ההפרש) ואחת שתסמן אם יש ביט שאול.

2.1 חצי מחסר

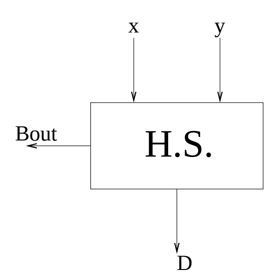
<u>כניסות</u>: x, y.
<u>יציאות</u>: D, B_{out}.
<u>חישוב</u>: מבצע $x-y$ התוצאה ניתנת ב-D(ifferance) והנשא ב- B_{out}(orrow).
<u>טבלת אמת</u>

x	y	D	B_{out}
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

<u>הפונקציות</u>:

$$\begin{aligned} D &= x'y+y'x=x\oplus y \\ B_{out} &= x'y \end{aligned}$$

<u>טענה</u>: $D=2B_{out}+(x-y)$ כמספרים בבסיס 2.
<u>סימון</u>:



2.2 מחסר מלא

<u>כניסות</u>: x, y, B_{in}.
<u>יציאות</u>: D, B_{out}.

<u>חישוב</u> : מבצע $x - y - B_{in}$ התוצאה ניתנת ב-D והביט השאול ב- B_{out}.

<u>טבלת אמת</u>

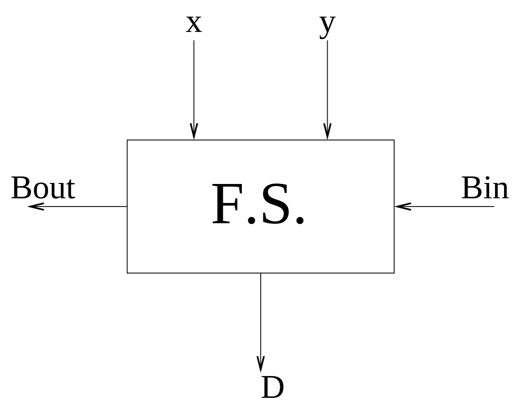
x	y	B_{in}	D	B_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

<u>הפונקציות</u> : ניתן לקבל אותן בעזרת מפות קרנו.

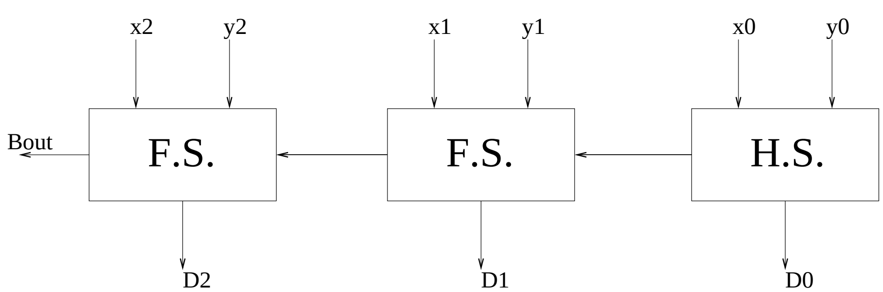
$$\begin{aligned} D &= xy'B'_{in} + x'yB'_{in} + x'y'B_{in} + xyB_{in} = x \oplus y \oplus B_{in} \\ B_{out} &= x'y + x'B_{in} + yB_{in} \end{aligned}$$

<u>טענה</u> : $D = 2B_{out} + (x - y - B_{in})$ כמספרים בבסיס 2.

<u>סימון</u> :



<u>שרשור מחסרים</u> : לחסור מספרים בני שלשה ביטים.



3 משווים

מעגלים המיועדים להשוות בין שני מספרים ולקבוע האם הראשון גדול מן השני, האם הם שווים או האם השני גדול מן הראשון. אנו נעסוק במספרים אי-שליליים בלבד. ניתן לרשום טבלת אמת

לכל אחת משלוש הפונקציות $A < B$, $A = B$, $A > B$. אולם, אם המספרים מיוצגים בעזרת n ביטים יהיה צורך ב- 2^{2n} שורות בטבלת האמת, שכן עלינו לבדוק את כל האפשרויות של A ו- B. כך לדוגמא, עבור מספרים בני $n = 4$ ביטים יהיה עלינו לרשום $2^8 = 256$ שורות בטבלת האמת. נפתח שני מעגלים למשווים על סמך שני אלגורתמים.

3.1 ישום ישיר

נתבונן בדוגמא הבאה. נשווה בין המספרים 1245 ו- 1261, כיצד אנו קובעים כי הראשון קטן מן השני? נשווה את הספרה המשמעותית ביותר בשני המספרים ונקבל $1 = 1$, נמשיך לספרה הבאה ונקבל $2 = 2$. כשנעבור לספרה הבאה נקבל כי $4 < 6$ ומכאן קיבלנו את הדרוש. נרשום את האלגוריתם בצורה מדויקת בבסיס 2.

נניח מספרים בני 4 ספרות בבסיס 2 (ביטים), נרשום $A = A_3A_2A_1A_0$ ו-$A = B_3B_2B_1B_0$. ראשית נגדיר משתנים שיבטאו באופן לוגי את השוויון $A_i = B_i$. נרשום (עבור $i = 0, 1, 2, 3$):

$$x_i = A_i \odot B_i = A_iB_i + A_i'B_i'$$

לכן מתקיים :

$$A_i = B_i \Leftrightarrow x_i = 1$$

מכאן נוכל לקבל מיד את התנאי לשוויון בין שני המספרים :

$$\begin{aligned} A = B \quad &\Leftrightarrow \quad A_3 = B_3 \ , A_2 = B_2 \ , A_1 = B_1 \ , A_0 = B_0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_3 = 1 \ , x_2 = 1 \ , x_1 = 1 \ , x_0 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x_3x_2x_1x_0 = 1 \end{aligned}$$

נבדוק באלו מקרים $A > B$, ישנן ארבע אפשרויות (שרק אחת מהן מתקיימת בו-זמנית) :

1. $1 = A_3 > B_3 = 0$.
2. $A_3 = B_3 \ , 1 = A_2 > B_2 = 0$.
3. $A_3 = B_3 \ , A_2 = B_2 \ , 1 = A_1 > B_1 = 0$.
4. $A_3 = B_3 \ , A_2 = B_2 \ , A_1 = B_1 \ , 1 = A_0 > B_0 = 0$.

ארבע התנאים בולאנים המתאימים הינם :

1. $A_3B_3' = 1$.
2. $x_3A_2B_2' = 1$.
3. $x_3x_2A_1B_1' = 1$.
4. $x_3x_2x_1A_0B_0' = 1$.

ומכאן :

$$A > B \Leftrightarrow A_3B_3' + x_3A_2B_2' + x_3x_2A_1B_1' + x_3x_2x_1A_0B_0'$$

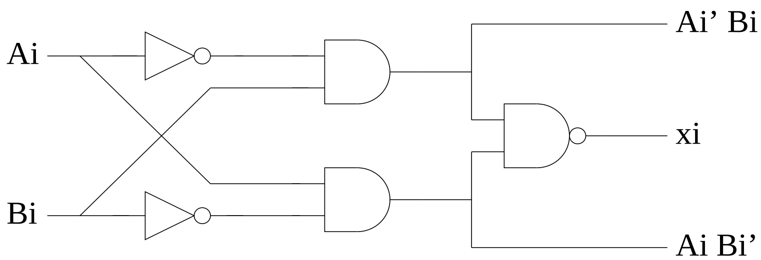
באותו אופן :

$$B > A \Leftrightarrow B_3A_3' + x_3B_2A_2' + x_3x_2B_1A_1' + x_3x_2x_1B_0A_0'$$

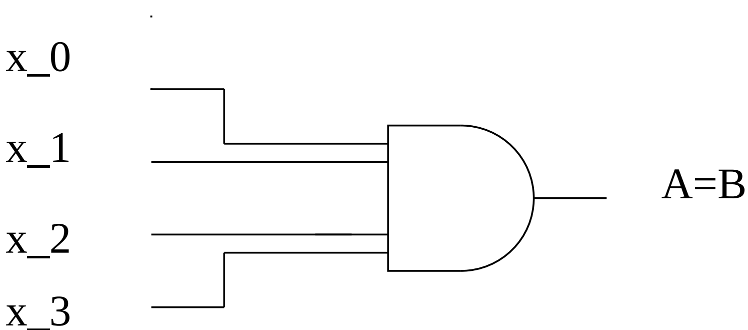
נשים לב כי בפונקציות שהגדרנו מופיעים ביטויים מהצורה A_iB_i' ו- $A_i'B_i$ נרשום את x_i באותו אופן.

$$\begin{aligned}
(A_i'B_i + A_iB_i')' &= (A_i'B_i)'(A_iB_i')' \\
&= (A_i + B_i')(A_i'B_i) \\
&= A_iA_i' + A_iB_i + A_i'B_i' + B_iB_i' \\
&= A_iA_i' + A_iB_i + A_i'B_i' + B_iB_i' \\
&= A_iB_i + A_i'B_i' \\
&= x_i
\end{aligned}$$

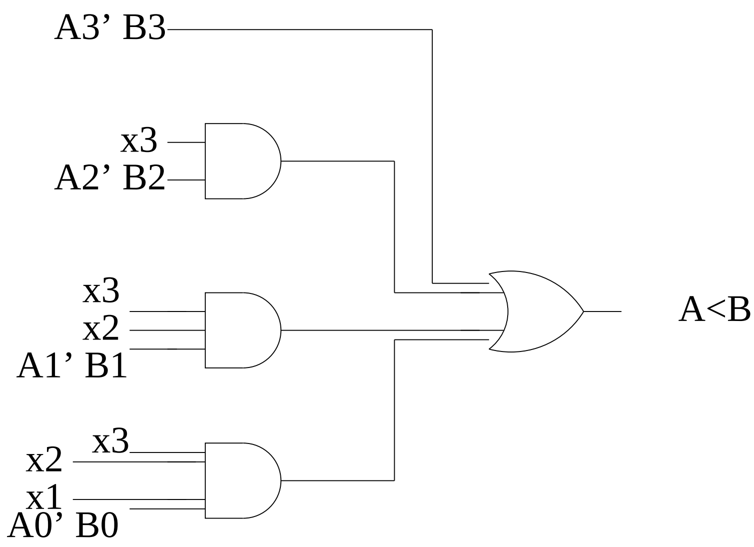
המעגל הבסיסי הינו :



הקביעה האם המספרים שווים נעשית ע״י :



הקביעה האם $A < B$ נעשית ע'י :



ולהפך עבור $A > B$.

3.2 יישום בעזרת מחסרים

נעזר בעובדה הבאה :

$$A > B \;\Leftrightarrow\; A - B > 0$$
$$A = B \;\Leftrightarrow\; A - B = 0$$
$$A < B \;\Leftrightarrow\; A - B < 0$$

נחשב את $A - B$ ע'י שרשור ארבעה מחסרים מלאים, יש חמש יציאות $D_3D_2D_1D_0$ (ההפרש) ו- B_{out} (הקובע האם יש ביט שאול נוסף). נשים לב כי $A < B \Leftrightarrow B_{out} = 1$. כמוכן, יש יציאה של ההפרש השונה מ-0 אם ורק אם $A \neq B$, ולכן $A \neq B \Leftrightarrow D_3 + D_2 + D_1 + D_0 = 1$. בעזרת שתי יציאות אלו - $A < B$, $A \neq B$ - ניתן לקבל את כל היציאות הדרושות ע'פ השרטוט המצורף.