אביב 2002

מיתוג ומערכות ספרתיות
אלגברה בולאנית

1 אקסיומות וטענות

<u>הגדרה</u> (E.V.Huntigton 1904)
קבוצה B ושתי פעולות דו-מקומיות $+$, $\cdot$ נקראים אלגברה בולאנית דו-ערכית אם מתקיימות שש האקסיומות הבאות (לכל $x,y,z\in B$) :

1	סגירות	$x+y\in B$	$x\cdot y\in B$
2	אברי יחידה	$x+0=x$	$x\cdot 1=x$
3	קומוטטביות	$x+y=y+x$	$x\cdot y=y\cdot x$
4	דיסטריבוטביות	$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$	$x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$
5	משלים	$x'+x=1$	$x'\cdot x=0$
6	$\lvert B\rvert\geq 2$		

<u>הערות</u>

1. האיבר 0 הינו איבר היחידה של הפעולה $+$, והאיבר 1 הינו איבר היחידה של הפעולה $\cdot$.
2. אקסיומה מס' 5 דורשת שלכל $x\in B$ יהיה קיים $x'\in B$ כך שמתקיים $x'\cdot x=0$ ו- $x'+x=1$.
3. עקרון הדואליות : האקסיומות נתונות בזוגות - אחת לכל אחת משתי הפעולות. לכן אם Φ היא טענה נכונה (אמיתית) באלגברה בולאנית, אזי הטענה המתקבלת מהחלפת הפעולות זו בזו, ומהחלפת אברי היחידה זה בזה בטענה Φ - נכונה גם היא.
4. קדימות אופרטורים : $() \to$ NOT $\to$ AND $\to$ OR.

אנו נעסוק באלגברה בולאנית דו-ערכית, $B=\{0,1\}$, עם הפעולות הבאות :

x	y	$x+y$	$x\cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

x	x'
0	1
1	0

יש להראות כי אכן כל האקסיומות מתקיימות. לפעולות אלו צורות רישום שונות כגון :

$x+y$	x OR y	$x\vee y$	$\max\{x,y\}$	$x\mid y$
$x\cdot y$	x AND y	$x\wedge y$	$\min\{x,y\}$	$x\ \&\ y$
x'	NOT x	$\neg x$	$1-x$	$!x$

טענות

7	אידמפוטנטיות	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
8		$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
9	אסוציטביות	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(xy)z = x(yz)$
10	צמצום	$x + xy = x$	$x(x + y) = x$
11		$x + x'y = x + y$	$x(x' + y) = xy$
12	דה-מורגן	$(x + y)' = x' \cdot y'$	$(xy)' = x' + y'$
13	$(x')' = x$		

הערות

1. לעיתים משמיטים את הסימן $\cdot$ ורושמים xy במקום $x \cdot y$.
2. כללי דה-מורגן ניתנים להרחבה למספר כלשהוא של משתנים :
$(x_1 x_2 \ldots x_n)' = x_1' + x_2' + \ldots + x_n'$ וגם $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)' = x_1' x_2' \ldots x_n'$.

דוגמאות (המספר ליד סימן השווה הינו מספר הכלל בעזרתו נעשה המעבר)

.1

$$\begin{array}{lcl} x + y' + x'y + (x + y')x'y & = & (4) \\ x + y' + x'y + xx'y + y'x'y & = & (5) \\ x + y' + x'y + 0 + 0 & = & (2) \\ x + y' + x'y & = & (11) \\ x + y' + y & = & (5) \\ x + 1 & = & (8) \\ 1 & & \end{array}$$

.2

$$\begin{array}{lcl} xy + x'z + yz & = & (2) \\ xy + x'z + yz \cdot 1 & = & (5) \\ xy + x'z + yz(x + x') & = & (4) \\ xy + x'z + yzx + yzx' & = & \\ xy + xyz + x'z + x'zy & = & (10) \\ xy + x'z & & \end{array}$$

.3

$$\begin{array}{lcl} (x + y')(x' + z)(y + z') & = & (4) \\ (xx' + xz + x'y' + y'z)(y + z') & = & (2,5) \\ (xz + x'y' + y'z)(y + z') & = & (\text{last example}) \\ (xz + x'y')(y + z') & = & \\ xyz + xzz' + xy'y + x'y'z' & = & (2,5) \\ xyz + x'y'z' & & \end{array}$$

.4

$$\begin{array}{ll} (x' + xyz') + (x + x'y'z)(x(x' + y' + z))' & = (11) \\ (x' + yz') + (x + x'y'z)(x(x' + y' + z))' & = (11) \\ (x' + yz') + (x + y'z)(x(x' + y' + z))' & = (12) \\ (x' + yz') + (x + y'z)(x' + (x' + y' + z)') & = (12) \\ (x' + yz') + (x + y'z)(x' + (xyz')) & = (11) \\ (x' + yz') + (x + y'z)(x' + yz') & = (10) \\ x' + yz' & \end{array}$$

2 הצגות שונות של פונקציות בולאניות

כל פונקציה בולאנית עם n משתנים ניתן להציג בטבלה עם 2^n שורות.
לדוגמא :

	x	y	z	$f(x,y,z)$	min term	max term
0	0	0	0	0		$x+y+z$
1	0	0	1	0		$x+y+z'$
2	0	1	0	1	$x'yz'$	
3	0	1	1	0		$x+y'+z'$
4	1	0	0	1	$xy'z'$	
5	1	0	1	0		$x'+y+z'$
6	1	1	0	1	xyz'	
7	1	1	1	1	xyz	

<u>הגדרה</u> : ליטרל - הינו משתנה בולאני x או שלילתו x'.
<u>הגדרה</u> : מכפלה סטנדרטית (min term) של n משתנים בינאריים עבור ההצבה $a_1a_2\ldots a_n$ היא הביטוי המתקבל מפעולת AND של n ליטרלים, אחד עבור כל משתנה. אם $a_i=1$ נרשום בביטוי את הליטרל x_i, ואם $a_i=0$ נרשום בביטוי את הליטרל x'_i.
נשים לב כי המכפלה הסטנדרטית המתאימה להצבה $a_1a_2\ldots a_n$ מקבלת את הערך 1 רק על ההצבה $a_1a_2\ldots a_n$, ואת הערך 0 על כל הצבה אחרת.
<u>דוגמא</u> : בשורה מס' 2 בטבלה. ההצבה היא 010. $x=0$ לכן המשתנה x נרשם בצורתו השלילית - x'. $y=1$ לכן המשתנה y נרשם בצורה החיובית - כמו שהוא. $z=0$ לכן המשתנה z נרשם בצורתו השלילית - z'. מכאן המכפלה הסטנדרטית הינה $x'yz'$.
<u>הגדרה</u> : סכום סטנדרטי (max term) של n משתנים בינאריים עבור ההצבה $a_1a_2\ldots a_n$ היא הביטוי המתקבל מפעולת OR של n ליטרלים, אחד עבור כל משתנה. אם $a_i=0$ נרשום בביטוי את הליטרל x_i, ואם $a_i=1$ נרשום בביטוי את הליטרל x'_i.
נשים לב כי הסכום הסטנדרטי המתאימה להצבה $a_1a_2\ldots a_n$ מקבל את הערך 0 רק על ההצבה $a_1a_2\ldots a_n$, ואת הערך 1 על כל הצבה אחרת.
<u>דוגמא</u> : בשורה מס' 3 בטבלה. ההצבה היא 011. $x=0$ לכן המשתנה x נרשם בצורה החיובית - x. $z=1,y=1$ לכן המשתנים z,y נרשמים בצורתם השלילית - z',y'. מכאן הסכום הסטנדרטי הינו $x+y'+z'$.
<u>הגדרה</u> : יצוג של פונקציה f בצורת סכום של מכפלות סטנדרטיות (DNF - Disjunctive Normal Form) הוא סכום המכפלות הסטנדרטיות של ההצבות $a_1\ldots a_n$ המקיימות $f(a_1\ldots a_n)=1$.
<u>דוגמא</u> : הפונקציה שבטבלה מקבלת את הערך 1 על ההצבות 010, 100, 110, 111,
ולכן תרשם כ- $f(x,y,z)=x'yz'+xy'z'+xyz'+xyz$.
נשים לב כי הסכום שרשמנו מקבל את הערך 1 אםם בדיוק אחת מן המכפלות מקבלת את הערך 1. אולם, ע'פ הבחירה, אלו בדיוק המכפלות המתאימות להשמות בהן הפונקציה f מקבלת את הערך 1.
<u>הגדרה</u> : יצוג של פונקציה f בצורת מכפלה של סכומים סטנדרטיים (CNF - Conjunctive Normal Form) היא מכפלת הסכומים הסטנדרטיים של ההצבות $a_1\ldots a_n$ המקיימות $f(a_1\ldots a_n)=0$.
<u>דוגמא</u> : הפונקציה שבטבלה מקבלת את הערך 1 על ההצבות 000, 001, 011, 101,
ולכן תרשם כ- $f(x,y,z)=(x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z')(x'+y+z')$.
נשים לב כי המכפלה שרשמנו מקבלת את הערך 0 אםם בדיוק אחד מן הסכומים מקבל את הערך 0. אולם, ע'פ הבחירה, אלו בדיוק הסכומים המתאימים להשמות בהן הפונקציה f מקבלת את הערך 0.
<u>הערות</u>

1. הפונקציה f' מקבלת את הערך 1 בדיוק בהשמות בהן הפונקציה f מקבלת את הערך 0, ולהפך. מכאן, כדי לרשום את הפונקציה f' בצורת סכום מכפלות יש לכלול בסכום את המכפלות המתאימות להשמות בהן $f=0 \Leftrightarrow f'=1$.
באופן אופן, כדי לרשום את הפונקציה f' בצורת מכפלת סכומים יש לכלול במכפלה את הסכומים המתאימים להשמות בהן $f=1 \Leftrightarrow f'=0$.

2. לעיתים נוח לבטא את סכום המכפלות ע"י $f = \sum(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_l)$ כאשר $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_l$ הם היצוגים בבסיס עשר של כל ההשמות בהן הפונקציה מקבלת את הערך 1. בדוגמא $f = \sum(2,4,6,7)$, משום שהפונקציה מקבלת את הערך 1 בהשמות (2) 0 1 0 , (4) 0 0 1 , (6) 0 1 1 , (7) 0 1 0.

3. לעיתים נוח לבטא את מכפלת הסכומים ע"י $f = \prod(\bar{a}_1 \dots \bar{a}_l)$ כאשר $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_l$ הם היצוגים בבסיס עשר של כל ההשמות בהן הפונקציה מקבלת את הערך 0. בדוגמא $f = \prod(0,1,3,5)$, משום שהפונקציה מקבלת את הערך 1 בהשמות (0) 0 0 0 , (1) 1 0 0 , (3) 1 1 0 , (5) 1 0 1.

3 שלמות קבוצות של פונקציות בולאניות

<u>הגדרה</u> : קבוצה F של פונקציות בולאניות נקראת שלמה אם ניתן לממש כל פונקציה בולאנית בעזרת פונקציות מן הקבוצה.

<u>משפט</u> : הקבוצה $\{+,\cdot,'\}$ הינה שלמה.

<u>הוכחה</u> : כל פונקציה בולאנית ניתן להציג בעזרת טבלה. ראינו כיצד ניתן להציג (מטבלה) כל פונקציה בולאנית בצורת סכום מכפלות או מכפלת סכומים. בשני המקרים משתמשים רק בפונקציות $\{+,\cdot,'\}$.

<u>מסקנה</u> : הקבוצות $\{+,'\}$ ו- $\{\cdot,'\}$ הינן שלמות.

<u>הוכחה</u> : ע"פ כללי דה-מורגן (טענות 12 לעיל) $a \cdot b = (a' + b')'$ וגם $a + b = (a' \cdot b')'$. כלומר בעזרת כל אחת מן הקבוצות (בנפרד) ניתן לממש את הקבוצה השלמה $\{+,\cdot,'\}$. <u>טענה</u> : הפונקציה NAND המוגדרת ע"י $x \text{ NAND } y = (xy)'$.

<u>הוכחה</u> : נראה כי ניתן לממש את הקבוצה השלמה $\{\cdot,'\}$.

ניתן לממש את הפונקציה NOT משום ש-

$$x \text{ NAND } x = (x \cdot x)' = x'$$

השוויון האחרון נובע מאדמפוטנטיות של פעולת ה- AND. ניתן לממש את הפונקציה AND משום ש-

$$\begin{aligned}(x \text{ NAND } y) \text{ NAND } (x \text{ NAND } y) &= ((x \cdot y)' \cdot (x \cdot y)')' \\ &= (x \cdot y)'' \\ &= (x \cdot y)\end{aligned}$$

<u>טענה</u> : הפונקציה $f(x,y,z) = x' + yz$ והפונקציות הקבועות 1,0 הינם קבוצה שלמה.

<u>הוכחה</u> : נראה כי ניתן לממש את הקבוצה השלמה $\{\cdot,'\}$. ואכן :

$$\begin{aligned}f(x,0,0) &= x' + 0 \cdot 0 = x' + 0 = x' \\ f(1,x,y) &= 1' + x \cdot y = 0 + x \cdot y = x \cdot y\end{aligned}$$