1.2.2006

החוק החלש של המספרים הגדולים:

$X_1, X_2, \dots X_n, \dots$ סדרה אינסופית של מ"מ בעלי תוחלות:

$\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n, \dots$ בהתאמה. $E(X_n) = \mu_n$

נגדיר סדרה: של ממוצע רץ:

$\overline{X}_1, \overline{X}_2, \dots \overline{X}_n, \dots$ $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

מליניאריות התוחלת, ניתן לראות שתוחלת הממוצע הרץ היא:

$$\overline{\mu}_n = E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

- נאמר שעל הסדרה $X_1, X_2 \dots X_n, \dots$
חל החוק החלש אמ"מ לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$P\left(|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

- תנאי מספיק לקיום החוק החלש (התנאי המספיק היסודי): אם
אם $Var(\overline{X}_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ אז הסדרה $X_1 \dots X_n \dots$
מקיימת את החוק החלש.

- הוכחה, באמצעות אי שוויון צ'בישב

$$P\left[|X - \mu_X| > \varepsilon\right] \le \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le P\left[|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n| > \varepsilon\right] \le \frac{Var(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$$

לכן אם $Var(\overline{X}_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ גם $P[\quad]$ ישאף ל-0.

- מקרה פרטי:

$X_1, X_2 \dots X_n, \dots$ מ"מ בת"ס בעלי שונות סופית σ^2

ותוחלת $\mu_i = \mu$. $\overline{\mu}_n = \mu$.

- האם חל על הסדרה החוק החלש?

$$Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{(בת"ס)}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

צ"ל, מתקיים התנאי המספיק והסדרה מקיימת את החוק החלש:

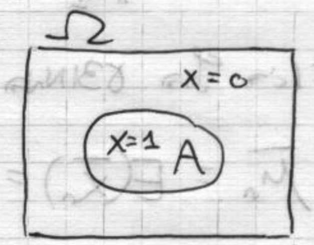
$$P\left[|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

-מקרה פרטי נוסף:

ניסוי שחוזרים עליו.

יהי A מאורע כלשהו. נגדיר X מ"מ אינדיקטור:

$$X=\begin{cases} 0 & \omega\notin A \\ 1 & \omega\in A \end{cases}$$



$$P(X=0)=1-PA\,.\quad P(X=1)=P(A)$$

$$E(X)=P(A)\,.\quad X^2=X\,.\quad E(X^2)=E(X)=P(A)$$

$$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)=P(A)-P^2(A)=P(A)(1-P(A))\,.$$

חוזרים על הניסוי (הגרלת ω כלשהי) הרבה פעמים ומקבלים

סדרת מ"מ $X_1,\dots X_n\dots$ $X_i\in\{0,1\}$

על הסדרה הזו חל החוק החלש:

$$P\left(|\bar{X}_n-P(A)|>\varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כאשר $\bar{X}_n$ הוא בעצם פרופורצית הפעמים ש A קרה במשך הניסויים.