8) $X\sim B(n,p_1)$ $Y\sim B(n,p_2)$ ב״ת. $p_1,p_2<\frac{1}{2}$.

א. לא נכון $(X+Y)\sim B(n,p_1+p_2)$

לכן גם ג. לא נכון $Var(X+Y)=n(p_1+p_2)$

לכן גם ד. לא נכון.

ב) נכון $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=np_1+np_2=n(p_1+p_2)$

<u>הרצאה 2</u>: 8.3.2006

עוד ממשיך לפתור את המבחן מסמסטר א׳.

7) ראובן, שמעון, לוי ויהודה. לכולם מטבע שהסתברותו לראש p.

A - ראובן, שמטיל עד ראש ושמעון, שמטיל עד ראש, מס״מ יחד.

B - אותו דבר עם לוי ויהודה. רק שיהודה מטיל עד זנב.

- עשינו כבר בכיתה את A:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{\infty}(pq^{k-1})^2=\frac{p^2}{1-q^2}=\frac{p}{1+q}$$

$$P(B)=\sum_{k=1}^{\infty}pq^{k-1}\cdot q\cdot p^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(pq)^k=\frac{pq}{1-pq}$$

$$\frac{\cancel{p}1}{1+q}\overset{?}{\gtreqless}\frac{\cancel{p}q}{1-pq}\quad 1-pq\ ?\ q+q^2\ .\ p^2\ ?\ q^2\to p\ ?\ q$$

וזה לא ידוע מהנתונים - תלוי בערך של p. התשובה: ד.

---

9) שלוש ציפורים A, B, C. כל אחת, בהסתברות $\frac{1}{2}$ אוכלת ובהס׳ $\frac{1}{2}$ שומרת, באופן ב״ת באחרות ובהחלטות העבר. בכל יום כינן נץ בא וטורף מישהי מקרית אם כולן אוכלות.

- הצלחה של הנץ זה כששלושתן אוכלות - ההסתברות להצלחה $\frac{1}{8}$ וכשלון בהסתברות $\frac{7}{8}$. ואז הנסיונות של הנץ עד שהראשונה נטרפת זה נמו הטלת מטבע שהסתברותו להצלחה $\frac{1}{8}$ עד שיש הצלחה.

תוחלת הזמן של זה $\frac{1}{\frac{1}{8}}=8$ אח״כ תוחלת 4 ואח״כ 2.

ואכן א) נכון. בתוחלת הנץ יטרוף את כולן - 14. $8+4+2=14$

ב) תוחלת של זמן עד שכולן יגיעו (תוחלת של גאומטרי: $\frac{q}{p^2}$)

$$\frac{\frac{7}{8}}{(\frac{1}{8})^2}+\frac{\frac{3}{4}}{(\frac{1}{4})^2}+\frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2}=56+12+2=70$$

ג) מר אומר. אם יונה לא נטרפה ראשונה, היא נטרפה שניה בהסת' $\frac{1}{2}$ ושלישית בהסתברות $\frac{1}{2}$ ואז היא חיה 12 או 14 בהסתברויות שוות,

לכן התוחלת 13. ג) נכון.

ג) התשובה הנכונה - ד) כל התשובות נכונות.

10) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ מ"מ בת"ש

סימטריים סביב האפס $P(x_i=-\varepsilon)=P(x_i=+\varepsilon)$

$$m_1=\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 .$$

א) ב"ת. ב) ב"מ. ג) בלה. ד) הכל נכון.

ג) $Var(\bar{X}_n)=E(m_2)$

נבדוק את ג:

$$Var(\bar{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n} \quad . \quad E(m_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{E(x^2)}_{E(x^2)-E^2(x)=\sigma^2}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum^{n}\sigma^2=\frac{n\sigma^2}{n}=\sigma^2 \quad . \quad Var(\bar{X}_n)\neq E(m_2)$$

ג) לא נכון $\Rightarrow$ ד) לא נכון. $\Rightarrow$ ב) לא נכון כי אם היה נכון אז גם א) נכון במילא.

נראה את א בכ"ז:

$$Cov(\bar{X}_n,m_2)=E(\bar{X}_n m_2)-\overset{0}{E(\bar{X}_n)}\overset{\sigma^2}{E(m_2)}=\ldots$$

$$Cov(\bar{X}_n,m_2)=\frac{1}{n^2}Cov\left(\sum x_i,\sum x_i^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot n\,Cov(x_1,x_1^2)=\frac{1}{n}\left[E(x_i^3)-E(x_i)E(x_1^2)\right]=\frac{1}{n}(0-0).$$

עוזי יקבל קהל לפני תחילת הבחינות ב:
יום א' 19.3 משעה 10:00 עד 13:00
בחדרו שפרבמן 209.

משתנים מקריים רציפים : Continuous

עד עכשיו דיברנו על מ"מ בדידים. חלקם היו אינסופיים, אבל הקבוצה בת מנייה. עכשיו נעבור לרציף.

דוגמה: בוחרים מספר ממשי באקראי בתחום $[0,1]$
עוזי שואל מה ההסתברות שהמספר נמצא ב $[0,\frac{1}{2}]$ ואנחנו עונים - $\frac{1}{2}$.
מטעמי סימטריה גם $P[\frac{1}{2},1]=\frac{1}{2}$
ובגלל שמאורעות משלימים משלימים הסתברות ל 1, גם $P((\frac{1}{2},1])=\frac{1}{2}$
ומכאן נסיק ש $P(\frac{1}{2})=0$.

- איך מסבירים את זה שסכום של אינסוף הסתברויות 0 (לנקודות קטנות) מסתכם ל 1? אי אפשר לסכם, לחבר. כי כדי לחבר צריך סדר $a_1+a_2+\dots$ אבל את כל מספרי הקטע $[0,1]$ אי אפשר בכלל לסדר בסדרה, כי הם ~~קבוצה~~ קבוצה לא בת מנייה.

- מ"מ רציף בעל ההתפלגות האחידה בתחום $[0,1]$
$X\sim U([0,1])$. ואז:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=P(\alpha<X\le\beta)=P(\alpha\le X<\beta)=P(\alpha<X<\beta)=(\beta-\alpha) \qquad 0\le\alpha<\beta\le 1$$

ובכלל:

X מ"מ רציף בעל ההתפלגות האחידה בתחום $[L,R]$
$X\sim U([L,R])$

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\dots=\frac{\beta-\alpha}{R-L}$$

X מ"מ רציף ⟸ פונקציית הצפיפות $f(x)$ (density)

$$P(a<X\le b)=\int_a^b f(x)dx \qquad \forall a<b \qquad f(x)\ge 0$$

כאן אי אפשר להצביע על ההסתברות של ערכים נקודתיים, ולכן משתמשים באינטגרל של פונקציית צפיפות.

21.3.2006

הרצאה 3:

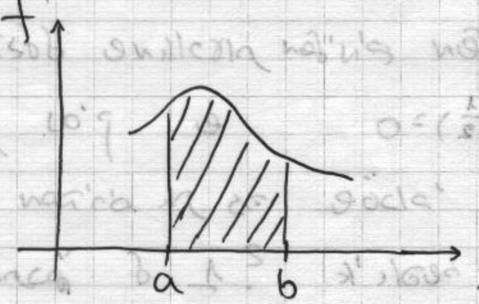
כל הגורמים (שלמדו בפרט לגורמים הבדידים, ועוד' חושב...

ממשיכים בנושא: **מ"מ רציף**

X מ"מ רציף. יש לו פונקצ"ית ~~צפיפ~~ צפיפות $f(x)\geq 0$ שנותנת עבור כל $a<b$ את $P(a<X\leq b)$ ע"י:

$$P(a<x\leq b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

האינטגרל הוא בעצם שטח מתחת לגרף הצפיפות



ואם מביטים על התחום האינסופי'

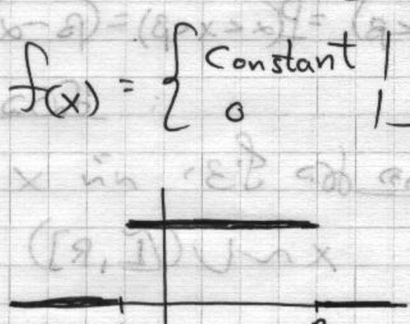
$$P(-\infty<X<\infty)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

דוגמה:

$X\sim U([L,R])$ רציף. $(-\infty<L<R<\infty)$

אז פונ' הצפיפות של X היא:

$$f(x)=\begin{cases}\text{Constant} & L\leq x\leq R\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$



ולכן:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{L}0\,dx+\int_{L}^{R}c\,dx+\int_{R}^{\infty}0\,dx=0+cx\Big|_L^R+0=$$

$$=c(R-L)\Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{R-L}}$$