# מבוא להסתברות וסטטיסטיקה ב

7.3.2006

**בחינה 1 :**

המתרגלים :

אורי ודניה .

התרגילים יתחלו בסוף שבוע זה .

חובה להגיש 70% מהתרגילים.

**שני סוגי שאלות במבחן של סמסטר א' :**

1) $X, Y$ מ"מ שו' התפלגות. (אין להניח שהם בל"ת).

$Var(X-Y)=5 .\ Var(X)=Var(Y)=1$

שואלים את מקדם המתאם בין $X$ ל $Y$.

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$$

עוד כבר רואה שיש בעיה עם הנתונים:

$$5=Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y) \Rightarrow Cov(X,Y)=-1\tfrac{1}{2}$$

ולכן

$$\rho=\frac{-1\frac{1}{2}}{\sqrt{1\cdot 1}}=-1\tfrac{1}{2}$$

זה אומר שלא, אבל זה לא יכול להיות. מקדם המתאם חייב להיות בין 1 ל $-1$.

התשובה הנכונה היא ⓐ הנתונים שגויים. (מי שענה ⓓ שלא, קיבל אז שאלה).

- עוד אומר: תהיו חשדנים!

2) $X, Y$ מ"מ שב"

$$\left.\begin{aligned} 6 &= Var(2X+3Y)=4\sigma^2+9\sigma^2+12Cov \\ 5 &= Var(X-2Y)=\sigma^2+4\sigma^2-4Cov \end{aligned}\right\}$$

מוצאים את הריבועים של $X$ (שהם גם הריבועים של $Y$), ואת הקווריאנס...

$\sigma^2=\frac{3}{4}$ . $Cov=\ldots$

התשובה הנכונה היא ⓒ

3) $X, Y$ מ"מ . $S=X+Y$ . $D=X-Y$

איזה מבין $S, D$ תשפיע לצורך תחזית עבור $X$ ?

ניתן להראות מי יחסוך לי יותר מהקרנה (עדות ניחוש תחזית $X$ ללא כלום סביר).

$$\rho^2(X,S)=\frac{Cov^2(X,S)}{Var(X)\,Var(S)}=\frac{Cov^2(X,X+Y)}{Var(X)\,Var(X+Y)}=\frac{[Var(X)+Cov(X,Y)]^2}{Var(X)[Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)]}$$

$$= \frac{Var X + Cov(X,Y)}{2Var(X)}.$$

באותו אופן

$$\rho^2(X,D) = \frac{Var(X) - Cov(X,Y)}{2Var(X)}$$

איזה אחד מהרכיבי $\rho^2$ גדול יותר? זה תלוי בסימן של השונות המשותפת $Cov(X,Y)$. לכן אי אפשר לענות-חסר נתון.

4) $N \sim Pois(\lambda)$. נגרל ערך של $N$ ונקבל לו $n$.
נטיל מטבע, שהסתברותו לראש - $q$, $(n+1)$ פעמים.
$B(n+1, q) \sim$ מס' הראשים
אבל כל הסתברות מותנה - בהנתן ש $N=n$.
מה ההסתברות שמס' הראשים הוא - 0.

$$P(\text{ראש } 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot P(\text{ראש } 0 \mid N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$= \cancel{q e^{-\lambda} e^{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\lambda}} = e^{-\lambda} q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} = e^{-\lambda} q \cdot e^{\lambda q} = \boxed{q e^{-\lambda(1-q)}}$$ ב)

5) ראובן מטיל מטבע $q$ עד לקבלת ראש לראשונה. $R \sim Geom(q)$
$A$ - ראובן הטיל מס' זוגי. ראוי בבירור: $P(A) = \frac{q}{1+q}$
שמעון מטיל עד שמקבל ראש. מס' ההטלות שזוגי-מטיל כן פעמים.
$B$ - בסברה השניה לא קבל אף ראש

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k P(k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k p \cdot q^{k-1} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{(1-q)q}{(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q}$$

כך ~~שלא~~ שגם המאורעות הסתברות שווה ב) $P(A) = P(B)$.

6) שאלה מעניינת. בכך לעשות באמצעות נוסחת

תשובה נכונה א) $\boxed{0.13}$.

7) נשאיר את זה לתרגיל.

8) $X \sim B(n, p_1)$ ו $Y \sim B(n, p_2)$ בת"ל. $p_1, p_2 < \frac{1}{2}$.

אז. לפי נכון $(X+Y) \sim B(n, p_1+p_2)$

לכן גם ב. לפי נכון $Var(X+Y) = n(p_1+p_2)$

לכן גם ג. לפי נכון.

ג) נכון $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = np_1 + np_2 = n(p_1+p_2)$

---

8.3.2006

הרצאה 8:

עדיין משיכה לסיים את המבחן מסמסטר א':

7) ראובן, שמעון, לוי ויהודה. לכולם מטבע שהסתברותו לראש $p$.

A - ראובן, שמעון ראש ושמעון, שמעון לוי עד ראש, מס"מים יחד.

B - אותו דבר עם לוי ויהודה. רק שיהודה מגיע עד ראש

- עשינו כבר בבית את A:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} (pq^{k-1})^2 = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}$$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} \cdot q \cdot p^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (pq)^k = \frac{pq}{1-pq}$$

$$\frac{\cancel{p}1}{1+q} \overset{?}{\gtreqless} \frac{\cancel{p}q}{1-pq} \quad 1-pq \overset{?}{\gtreqless} q+q^2 \quad p^2 \overset{?}{\gtreqless} q^2 \rightarrow p \overset{?}{\gtreqless} q$$

וכך לא נמנע מהנתונים - תלוי בערך של $p$. התשובה: ג.

---

9) שלוש בפורים A, B, C. כל אחת, בהסתברות $\frac{1}{2}$ אוכלת ובהס' $\frac{1}{2}$ שותה,

ראובן בת בארות ובהתלטות הדבר. בכל יום בין כל בא וטרף

מישהו מקרים אם כולן אוכלות.

- הבלבה של הכל כך כשכולן אוכלות - ההסתברות להבלבה $\frac{1}{8}$ וכשלון

בהסתברות $\frac{7}{8}$. ואז הנסולות של הכל עד שהראשונה נוהגת כך

נמו הטלת מטבע שהסתברותו להבלבה $\frac{1}{8}$ עד שיש הבלבה.

תוחלת הזמן של כך $\frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$ אותה תוחלת 4 ואח"כ 2.

ולכן אז נכון $8+4+2 = 14$. בתוחלת הזמן לטרוף את כולן - 14.