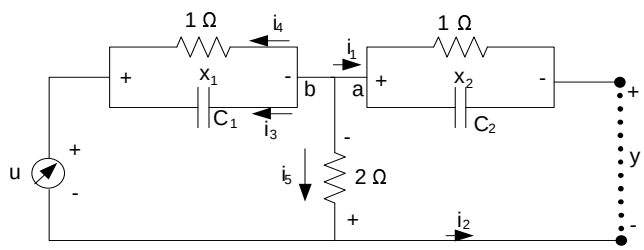
מערכות דינאמיות ובקרה

לביא שפיגלמן

11 בנובמבר 2007

- Controllability, Reachability, (Stabilizability)

נתייחס לדוגמא הבאה:



זה מעגל עם מקור מתח משתנה u. המתחים על הקבלים מוגדרים כמשתני מצב

נכתוב משוואות המתארות את המעגל:

ראשית נשים לב כי $i_1 = i_2 = 0$ כי אין להם לאן לצאת. כמו כן (חוק הצומת) $i_5 = u$. נכתוב משוואת זרמים עבור צומת a:

$$\dot{x}_2 C_2 = -\frac{x_2}{1} = -x_2$$

כלומר

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{C_2} \tag{1}$$

נרשום משוואת זרמים על צומת b:

$$i_5 = u = x_1 + C_1 \dot{x}_1$$

כלומר

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{C_1} + \frac{u}{C_1} \tag{2}$$

נרשום משוואת מתחים למעגל הפתוח מימין

$$y = x_2 + 2u \tag{3}$$

קל לראות שהדינמיקה של x_2 (משוואה 1) אינה מושפעת מאות הבקרה u מכאן שx_2 (והמערכת המלאה) אינו Controllable. באופן דומה ניתן לראות כי האות הנצפה y (משוואה 3) אינו מושפע מ x_1 ולכן x_1 בודאי אינו ניצפה.

Controllability, Reachability

הגדרות

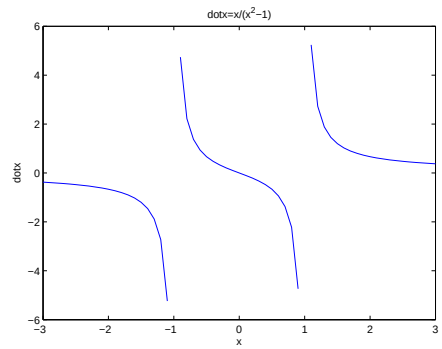
הגדרה: מערכת היא *controllable*(ניתנת לבקרה) אם לכל $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ וt_f יש אות בקרה $\mathbf{u}$ שמעביר את המערכת מ־$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, ל $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ בזמן t_f.

הערה: הגדרה זו טובה למערכתLTI. אם המערכת איננה לינארית הרי שהתנהגותה תלוייה בתחום בו נמצאים $\mathbf{x}(0)$ ו$\mathbf{x}(t_f)$. במקרה זה נהוג לתת הגדרה מעט שונה בה $\mathbf{x}_f = \mathbf{0}$. (כלומר זו היכולת להביא את המערכת למנוחה).

הגדרה: ה *reachable region*בזמן t_f של המערכת הוא התחום האפשרי של $\mathbf{x}(t_f)$ עבור מצב התחלתי $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ שניתן להגיע ואות בקרה $\mathbf{u}$ כלשהו. באופן דומה, ה־ *controllable region*הוא התחום האפשרי של $\mathbf{x}(0)$ כך שניתן להגיע ממנו בעזרת סיגנל בקרה מתאים ל־$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$.

ע"פ הגדרה זו, אם המערכת הנ"ל ניתנת לבקרה (במובן של הבאתה ל־0) אז ה־controllable region הוא המרחב כולו. אחרת, ניתן לשאול מה הcontrollable region. במערכת LTI הcontrollable region הוא תת מרחב של מרחב המצבים.

דוגמא: נתייחס למערכת $\dot{x} = \frac{x}{(x^2-1)} + u$. נשרטט את $\dot{x}(x)$ עבור $u = 0$



ב $x = 1$ וב $x = -1$ ישנם קירות שאינם ניתנים לחדירה ע"י $u < \infty$. ניתן לראות כי ה־controllable region הוא $(-1, 1)$.

במערכת LTI שני התחומים (הcontrollable והreachable) זהים.

הערה: אם $\mathbf{u}$ חסום ניתן לשאול מה התחום שניתן לבקרה בעזרת האות החסום.

משפט: (controllability)

תהי המערכת $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$. הטענות הבאות שקולות

1. הזוג $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ניתן לבקרה.
2. המטריצה

$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} BB' e^{A'(t-\tau)} d\tau$$

(המכונה לעיתים controllability grammian) איננה סינגולרית לכל t .

3. הcontrollability matrix שגודלה $n \times np$

$$\mathcal{C} = \left[\mathbf{B}\,\mathbf{AB}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B} \ldots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

היא בעלת דרגת שורות מלאה (n).

4. המטריצה $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \;\; \mathbf{B}]$ בעלת דרגת שורות מלאה לכל ערך עצמי λ של $\mathbf{A}$.

ניתן להשתכנע ש $1 \longleftrightarrow 3$ מהתבוננות במערכת דיסקרטית שמתחילה ממנוחה

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A^i}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-i-1) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{B}\,\mathbf{A}\mathbf{B}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B}\ldots\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

עבור $k > n$ נשתמש במשפט Cayley Hamilton...

נוכיח $1 \longleftrightarrow 3$ **:** כידוע

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t_f) &= e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (4) \\
&= e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(t_f-\tau)d\tau \qquad (5)
\end{aligned}$$

נזכור כי $e^{A\tau} = \mathbf{I} + \frac{\tau}{1!}\mathbf{A} + \frac{\tau^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots$. ע"פ C-H יודעים כי קיימים $\alpha_0(\tau), \ldots, \alpha_{n-1}(\tau)$ כך ש $e^{A\tau} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\tau)\mathbf{A}^i$. נציב זאת במשוואה 5 ונניח כי $\mathbf{x}_0 = 0$ לקבלת

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t_f) &= \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\tau)\mathbf{A}^i\mathbf{B}\mathbf{u}(t_f-\tau)d\tau \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}^i\mathbf{B} \int_0^{t_f} \alpha_i(\tau)\mathbf{u}(t_f-\tau)d\tau \\
&= \mathcal{C}\mathbf{z}
\end{aligned}$$

כש- $z_i = \int_0^{t_f} \alpha_i(\tau)\mathbf{u}(t_f-\tau)d\tau$.

מכאן ש $\mathbf{x}(t_f)$ נמצא בתמונה (range) של $\mathcal{C}$ ואם $\mathcal{C}$ לא פורש את המרחב כולו אז יש תת מרחב שאינו נשלט.

כעת נראה כיצד בעזרת $\mathbf{W}_c$ שאיננה סינגולרית (כלומר, בעזרת $\mathbf{W}_c^{-1}$) נמצא אות בקרה לכל שלישיה $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f, t_f$ (כלומר, נוכיח $2 \to 1$).

נבחר

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'(t_f-t)}\mathbf{W}_c^{-1}(t_f)\left[e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f\right] \qquad (6)$$

נציב את משוואה 6 במשוואה 4 ונקבל

$$\mathbf{x}(t_f) = e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_0 - \underbrace{\int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}(t_f-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'(t_f-\tau)}d\tau}_{\mathbf{W}_c}\mathbf{W}_c^{-1}(t_f)\left[e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f\right]$$

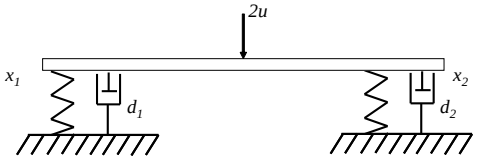
$$
\begin{aligned}
&= e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_0 - \mathbf{W}_c\mathbf{W}_c^{-1}(t_f)\left[e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f\right] \\
&= \mathbf{x}_f
\end{aligned}
$$

הערה: האות $\mathbf{u}$ הנ"ל הוא מינימלי במובן שלכל אות בקרה $\tilde{\mathbf{u}}$ שתאים לשלישיה $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f, t_f$ מתקיים ש

$$\int_0^{t_f} \tilde{\mathbf{u}}'(t)\tilde{\mathbf{u}}(t)dt \geq \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t_f}} \mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)dt$$

מערכת LTI

דוגמא: נתייחס למערכת המתלים הבאה



נניח כי משטח חסר מסה מוחזק משני צידיו ע"י בולמי זעזועים בעלי קבוע קפיץ 1 ובעלי מקדמי שיכוך d_1, d_2. שני צידי המשטח עולים ויורדים ללא תלות זה בזה. על המשטח מופעל כוח $2u$ שמתחלק לשני כוחות שווים בגודלם.

נרשום משוואת כוחות על כל בולם

$$u = x_i + d_i\dot{x}_i$$

נעביר את זוג המשוואות לצורה הסטנדרטית:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{d_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{d_2} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} \\ \frac{1}{d_2} \end{bmatrix} u$$

קל לראות כי אם המערכת מתחילה ממצב שאינו מנוחה היא תדעך למנוחה בקצב אקספוננציאלי ותגיע למנוחה רק ב־ ∞. אנו נרצה להביא את המערכת למנוחה ($\mathbf{x} = [0\ 0]'$) תוך זמן סופי t_f. לא ברור כי ניתן לעשות זאת כיוון שלרשותינו אות בקרה אחד לשני משתני מצב.

נניח כי $d_1 = 2$, $d_2 = 1$ ו $t_f = 2$. נקבל כי $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ו־ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

נבחן את מטריצת הcontrollability

$$\mathcal{C} = [\mathbf{b}\,\mathbf{A}\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

קל לראות שדרגתה 2 ולכן המערכת ניתנת לשליטה.

נמצא את $\mathbf{W}_c(2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_c(2) &= \int_0^2 \left(\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \right) d\tau \\
&= \int_0^2 \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{-\tau} & \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\tau} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}\tau} & e^{-3\tau} \end{bmatrix} \right) d\tau \\
&= \begin{bmatrix} 0.2162 & 0.3167 \\ 0.3167 & 0.4908 \end{bmatrix} \\
\mathbf{W}_c^{-1}(2) &= \begin{bmatrix} 84.91 & -54.79 \\ -54.79 & 37.39 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

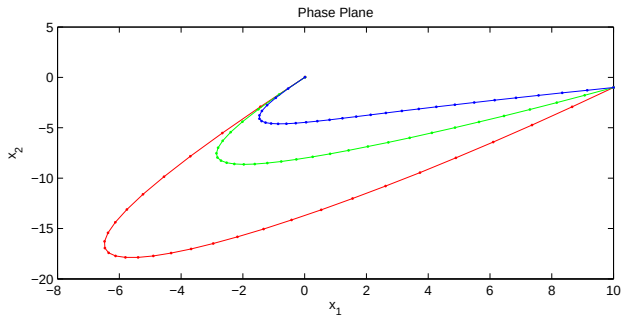
כעת, נניח כי המצב ההתחלתי של המערכת הוא $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$

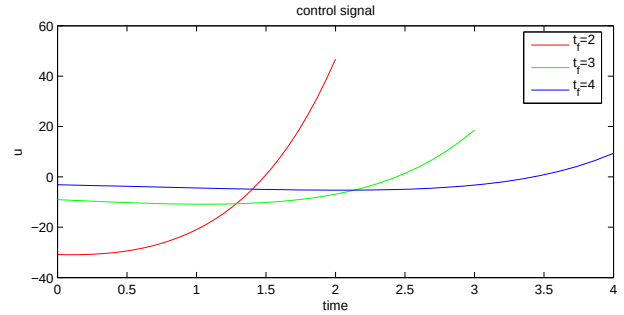
נציב במשוואה 6

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &= -\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t_f - t)} \mathbf{W}_c^{-1}(t_f) \left[e^{\mathbf{A}t_f}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f \right] \\
&= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}(2-t)} & 0 \\ 0 & e^{-(2-t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 84.91 & -54.79 \\ -54.79 & 37.39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= -58.82 e^{\frac{1}{2}t} + 27.96 e^{t}
\end{aligned}$$

ניתן להציב אות בקרה זה במשוואה 4 לקבלת $\mathbf{x}(t)$.

ככל שt_f מתקצר, אות הבקרה חזק יותר והמסלול שעושים המצבים עבור סיגנל זה קיצוני יותר



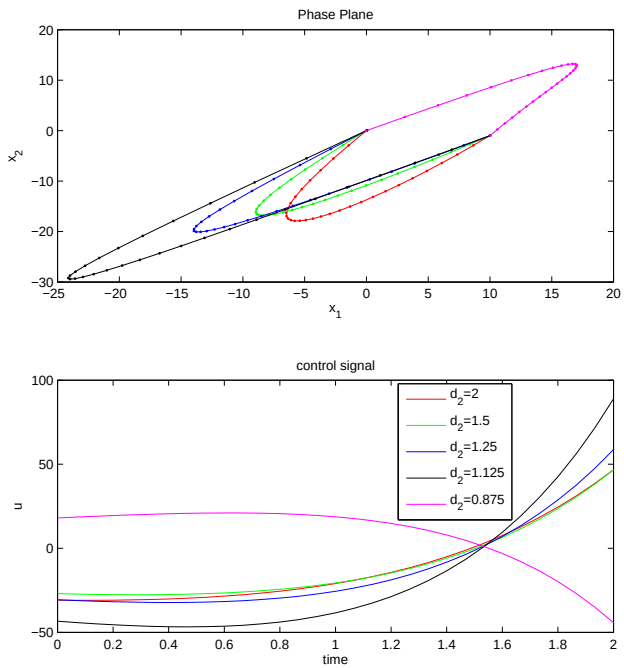


כמו כן, אם $d_1 \to d_2$ המערכת קשה יותר לבקרה. כש $d_2 = \{1.25, 1.1, 1\}$ מטריצות הcontrollability הן (בהתאמה)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1.25 & -1.237 \\ 1.00 & -1.00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.10 & -1.089 \\ 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

קל לראות שהווקטורים אשר פורשים את המרחב הולכים ומתקרבים ולבסוף מתאחדים.

ככל שהמערכת קרובה ללהיות סינגולרית האותות והמסלולים שנוצרים קיצוניים יותר



מערכת לינארית time varying (LTV)

אם המערכת היא time varying אז נהוג להגדיר זמנים t_0 ו־ t_f ולהגדיר controllability בייחס אליהם.

נניח כי ברשותינו מטריצת המעברים $\mathbf{\Phi}(t_f, t_0)$ אז

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{\Phi}(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(t)d\tau$$

(כשלעיתים הסימון B מוחלף ב G). באופן דומה למערכות LTI נגדיר $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$

$$\mathbf{W}_c(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{\Phi}(t_f, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}'(\tau)\mathbf{\Phi}'(t_f, \tau)d\tau$$

וניתן להראות כי אות הבקרה

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}'(t)\mathbf{\Phi}'(t_f, t)\mathbf{W}_c^{-1}(t_0, t_f)[\mathbf{\Phi}'(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_f]$$

יביא את המערכת ל$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$