אביב 2002

מיתוג ומערכות ספרתיות
יצוג מספרים ממשיים

ראינו כיצד ניתן לייצג מספרים שלמים במחשב וכיצד ניתן לבצע פעולות בסיסיות. נראה כיצד ניתן לייצג מספרים ממשיים.

1 Fixed point numbers

נציג את הרעיון בעזרת דוגמא. נניח כי אנו מייצגים מספרים בעזרת שמונה ביטים. נקבע כי נקודת השבר נמצאת בין הספרות הרביעית והחמישית. כלומר הצרוף 10101100 מייצג את המספר $10.75 = (1010.1100)_2$.
ניתן לבצע את כל פעולות החשבון כאילו אין נקודת שבר, ורק כאשר נותנים משמעות למספר להתייחס לנקודה. לדוגמא :

$$\begin{aligned} 3.625_{10} \to 11.101_2 \to 0011.1010_2 &\quad\to\quad 00111010 \\ 6.5_{10} \to 110.1_2 \to 0110.1000_2 &\quad\to\quad 01101000 \end{aligned}$$

נחבר את שני המספרים הבינריים ונקבל :

$$\begin{array}{r} 00111010 \\ +\quad 01101000 \\ \hline 10100010 \end{array}$$

מספר זה ניתן לפרש כ- $162 = (10100010)_2$ (אם לא שמים נקודת שבר) או כ- $10.125 = (1010.0010)_2$ (אם שמים נקודת שבר).
השיטה יעילה במיוחד כאשר הדיוק הנדרש חסום (לדוגמא בחישוב פיננסי). אולם אינה יעילה כאשר צריך לפרוש טווח רחב של מספרים. יש לשים לב כי תתכן גלישה 'בשני הכוונים', לדוגמא כאשר מכפילים מספרים שיש בהם חלק שלם ושבור יתכן כי התוצאה תהיה גדולה ועם חלק שבור קטן לדוגמא $101.0001 = (10.01)^2$.

2 Floating point numbers

<u>הגדרה</u> טווח של שיטת יצוג : המינימום והמקסימום על פני כל הערכים שניתן ליצג ועל פני ערכם המוחלט. כלומר, עד כמה יכולים להיות המספרים המיוצגים גדולים או קטנים.
<u>הגדרה</u> רזולוציה של מספר (Precision) הינה המרחק בין המספר לבין 'שכניו' ביצוג.
לדוגמא : המספר 2.718 הינו בעל רזולוציה 10^{-3} בעוד שהמספר 2.718281828 הינו בעל רזולוציה 10^{-9} .
<u>הגדרה</u> דיוק של מספר (Accuracy) הינה מידת הדיוק של הערך אותו רוצים ליצג.
לדוגמא : המספר 2.718 הינו קרוב מדויק יותר למספר e מאשר המספר 2.938281828, למרות שלשני רזולוציה גבוהה יותר.
הרזולוציה הינה חסם מלמעלה לרמת הדיוק.

ייצוג בשיטת נקודה צפה (בבסיס r) של מספר נעשה באופן הבא, מחלקים את רצף הביטים לשני קטעים הנקראים מנטיסה ואקספוננט.

Exponent	Mantisa

ערך המספר הינו $x = M \times r^E$ (מכאן ואילך נעבוד בבסיס בינארי, כלומר ניח כי $r = 2$).
<u>הגדרה</u> נאמר כי יצוג של מספר בשיטת נקודה צפה הוא מנורמל אם $2 > |M| \leq 1$ כלומר מתקיים $M = 1. \ldots$,
כך ניתן לחסוך בספרה. (לגבי יצוג הספרה 0 - בהמשך).
ישנן הגדרות אחרות, לדוגמא אם $0.5 \leq |M| < 1$.
<u>הגדרה</u> נאמר כי יצוג של מספר בשיטת נקודה צפה הוא מוטה ($biased$) עם הטיה B אם ערך המספר המיוצג ניתן ע"י $x = M \times r^{(E-B)}$. לרוב משתמשים בערכים $B = 2^{|E|-1}$ או $B = 2^{|E|-1} - 1$.
($|E|$ מסמן את מספר הביטים המוקצים ליצוג E).
ישנם שיקולים רבים כיצד ליצג במחשב מספרים בשיטת נקודה צפה (מספר הביטים הכולל, חלוקתם בין האקספוננט למנטיסה, שיטות היצוג של האקספוננט ושל המנטיסה וכו'). אנו נציג את התקן של IEEE.
המנטיסה מיוצגת בשיטת ביט סימן בצורה מנורמלת, והאקספוננט הינו מוטה, סכמטית :

S	E	F

ערך המספר הינו :

$$x = (-1)^S \times 2^{E-B} \times 1.F$$

הביאס נתון ע"י $B = 2^{|E|-1} - 1$.
הספרה 0 מיוצגת ע"י $E = F = 0$.
הערך המקסימלי של E מייצג NaN (לדוגמא $\frac{0}{0}$) או Inf - אין-סוף.
התקן מגדיר שלוש אפשרויות ליצוג מספרים ע"י $32, 64, 128$ ביטים.

להמחשה נעסוק במודל מוקטן בן שמונה ביטים בלבד :
S מיוצג ע"י ביט יחיד, ומיצג את הסימן (0 - חיובי, 1 - שלילי).
E מיוצג ע"י שלושה ביטים.
F מיוצג ע"י ארבעה ביטים (בצורה מנורמלת, ללא ספרת ה-'1' המובילה) .

<u>דוגמאות</u>

Binary	S	E	F	Term	Decimal
01101010	0	110	1010	$(-1)^0 \times 2^{110-011} \times 1.1010$	13
00000000	0	000	0000		0
10010110	1	001	0110	$(-1)^1 \times 2^{001-011} \times 1.0110$	-0.34375
00110000	0	011	0000	$(-1)^0 \times 2^{011-011} \times 1.0000$	1

חיבור מספרים המיוצגים בשיטת הנקודה הצפה

אלגוריתם

1. זהה את המספר עם האקספוננט הקטן יותר.
2. המר את היצוג של המספר שזיהית, כך שהאקספוננט שלו ישווה לזה של המספר הגדול (ע'י חלוקת המנטיסה בערך המתאים).
3. חבר את המנטיסות.
4. נרמל את התוצאה (אם יש צורך מחק ביטים מימין).

דוגמאות

- **בסיס 10** : $A = 123$, $B = 56.78$
  נחשב ישירות :

$$\begin{array}{rrl} & 123 & \\ + & 56 & .78 \\ \hline & 179 & .78 \end{array}$$

יצוג בצורה הנורמלית : $B = 5.678 \times 10^1$ $A = 1.23 \times 10^2$.
נשתמש באלגוריתם :

1. למספר B יש אקספוננט קטן יותר.
2. $B = 0.5678 \times 10^2$.
3. חיבור המנטיסות : $1.23 + 0.5678 = 1.7978$.
4. התוצאה מנורמלת : 1.7978×10^2.

- **בסיס 2** : $A = 00100100$, $B = 11001001$.

$$\begin{aligned} A &= (-1)^0 \times 2^{010-011} \times 1.0100 = (0.10100)_2 = 0.625 \\ B &= (-1)^1 \times 2^{100-011} \times 1.1001 = (-11.001)_2 = -3.125 \end{aligned}$$

נחשב ישירות :

$$\begin{array}{rrl} & 0 & .625 \\ - & 3 & .125 \\ \hline & -2 & .5 \end{array}$$

התוצאה הינה $-1.01 \times 2^1 = -10.1$ והיצוג הינו 11000100.
נשתמש באלגוריתם :

1. האקספוננט של A (010) קטן מן האקספוננט של B (100).
2. $A = 0.010100 \times 2^{100-011}$.
3. חיבור המנטיסות : $-1.1001 + 0.010100 = -1.010000$.
4. התוצאה מנורמלת : $-1.01000 \times 2^{100-011} = 11000100$.

• **בסיס 2**: $A = 01100100$, $B = 01010011$.

$$\begin{aligned} A &= (-1)^0 \times 2^{110-011} \times 1.0100 = 1010.0 = 10.0 \\ B &= (-1)^0 \times 2^{101-011} \times 1.0011 = 100.11 = 4.75 \end{aligned}$$

נחשב ישירות:

$$\begin{array}{rrl} & 10 & .0 \\ + & 4 & .75 \\ \hline & 14 & .75 \end{array}$$

התוצאה הינה $2^3 \times 1.11011 = 1110.11$ והיצוג הינו 01101101 (שגיאת עיגול).
נשתמש באלגוריתם:

1. האקספוננט של A (110) גדול מן האקספוננט של B (101).
2. $B = 0.10011 \times 2^{110-011}$.
3. חיבור המנטיסות: $1.0100 + 0.10011 = 1.11011 = 1.1101$ (שגיאת עיגול).
4. התוצאה מנורמלת: $1.1101 \times 2^{110-011} = 01101101$.