אביב 2002

מיתוג ומערכות ספרתיות
יצוג מספרים

1 יצוג מספרים

יהי $b \geq 2$ מספר שלם. מספר בבסיס b הינו ביטוי מן הצורה

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_b$$

כאשר מתקיים $a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.
הערך (משמעות, סמנטיקה) של מספר כזה הינה $\sum_{i=-m}^{n} a_i b^i$ או

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \ldots + a_{-m} b^{-m}$$

כלומר מיקום הספרה קובע את ערכה במספר.
טווח המספרים של מספר שלם בן n ספרות בבסיס b הוא $0, 1, 2 \ldots b^n - 1$.
בבסיסים הגדולים מ-10 מוסיפים את האותיות הראשונות של ה-abc לדוגמא בבסיס הקסדצימלי (16) הספרות הן : $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

<u>דוגמאות</u>

1. **בסיס 10** : $(239.7)_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1}$.
2. **בסיס 5** : $(214.03)_5 = 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2}$.
3. **בסיס 16** : $(AC.F)_{16} = (10) \cdot 16^1 + (12) \cdot 16^0 + (15) \cdot 16^{-1}$.
4. **בסיס 2** : $(101001.0101)_2 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4}$.

הכללים הנוהגים בפעולות החשבון לפי בסיס b זהים לאלו הנוהגים בבסיס עשר. יש לשים לב ולהשתמש רק בספרות $\{0, 1, \ldots, b-1\}$.

<u>דוגמאות</u>

1. **חיבור בבסיס 4** :

$$\begin{array}{rr} & 320.\ 1 \\ + & 31.\ 31 \\ \hline & 1012.\ 01 \end{array}$$

2. כפל בבסיס 2 :

$$\begin{array}{rr} & 110 \\ \times & 10 \\ \hline & 000 \\ + & 110 \\ \hline & 1100 \end{array}$$

3. חיסור בבסיס 16 :

$$\begin{array}{rr} & B120F \\ - & AC34E \\ \hline & 4EC1 \end{array}$$

2 מעבר בין בסיסים - מספרים טבעיים

2.1 מעבר לבסיס 10

<u>אלגוריתם</u>

קלט : מספר $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)$ בבסיס b.

פלט : ערך המספר בבסיס עשר הינו $\sum_{i=0}^{n} a_i b^i$.

<u>דוגמאות</u>

1. בסיס 5 :

$$\begin{aligned} (214)_5 &= 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 \\ &= 50 + 5 + 4 = (59)_{10} \end{aligned}$$

2. בסיס 16 :

$$\begin{aligned} AC.F_{16} &= (10) \cdot 16^1 + (12) \cdot 16^0 + (15) \cdot 16^{-1} \\ &= (172.9375)_{10} \end{aligned}$$

3. בסיס 2 :

$$\begin{aligned} (101001.0101)_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &\quad +0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\ &= (41.3125)_{10} \end{aligned}$$

2.2 מעבר מבסיס 10

<u>אלגוריתם</u>

קלט : מספר N (בבסיס 10) ובסיס b.

חישוב :

- איתחול $i \leftarrow 0$.
- כל עוד $N > 0$ בצע :

  { $r_i \leftarrow N \bmod b$.

  { $N \leftarrow \lfloor \frac{N}{b} \rfloor$.

  { $i \leftarrow i + 1$.

פלט : $(r_i r_{i-1} \ldots r_1)_b$.

<u>דוגמאות</u>

1. בסיס 5 :

   $N = 59$

$$\begin{array}{rll} 59 \div 5 & = 11 & r_1 = 4 \\ 11 \div 5 & = 2 & r_2 = 1 \\ 2 \div 5 & = 0 & r_3 = 2 \end{array}$$

פלט : $(r_3 r_2 r_1)_5 = (214)_5$.

2. בסיס 16 :

   $N = AC$

$$\begin{array}{rll} 172 \div 16 & = 10 & r_1 = 12\ (C) \\ 10 \div 16 & = 0 & r_2 = 10\ (A) \end{array}$$

פלט : $(r_2 r_1)_{16} = (AC)_{16}$.

3. בסיס 2 :

   $N = 41$

$$\begin{array}{rll} 41 \div 2 & = 20 & r_1 = 1 \\ 20 \div 2 & = 10 & r_2 = 0 \\ 10 \div 2 & = 5 & r_3 = 0 \\ 5 \div 2 & = 2 & r_4 = 1 \\ 2 \div 2 & = 1 & r_5 = 0 \\ 1 \div 2 & = 1 & r_6 = 1 \end{array}$$

פלט : $(r_6 r_5 r_4 r_3 r_2 r_1)_2 = (101001)_2$.

<u>נכונות</u>

נניח כי הפיתוח של N לפי הבסיס b הינו :

$$\begin{aligned} N &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 \\ &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 \end{aligned}$$

ניתן לרשום את את N באופן הבא :

$$N = (a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \ldots + a_1) \cdot b + a_0$$

ולכן ערך של חלוקת N ב- b הינו $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1$ והשארית הינה a_0. במקרה הכללי הערך של N לאחר k שלבים הינו :

$$\begin{aligned} N &= a_n b^{n-k} + a_{n-1} b^{n-k-1} + \ldots + a_{k+1} b^1 + a_k \\ &= (a_n b^{n-k-1} + a_{n-1} b^{n-k-2} + \ldots + a_{k+1}) \cdot b + a_k \end{aligned}$$

ולכן ערך של חלוקת N ב- b (בשלב ה-k) הינו $a_n b^{n-k-1} + a_{n-1} b^{n-k-2} + \ldots + a_{k+1}$ והשארית הינה a_k.

<u>הערה</u>

במעבר מבסיס 2^k לבסיס 2 כל ספרה תוחלף ל- k-יה (ולהפך).

<u>דוגמאות</u>

1. $(1\ 10\ 11)_2 = (123)_4$.
2. $(01\ 101\ 111\ 001)_2 = (1571)_8$.
3. $(1011\ 0111\ 0001\ 1111)_2 = (B71F)_{16}$.
4. $(011\ 0101\ 0101)_2 = (355)_{16}$.

3 מספרים שליליים וחיוביים (יצוג מספרים עם סימן)

נעסוק בבסיס $b = 2$ (הרחבה לבסיס כללי ניתן למצוא בספרות).

3.1 יצוג בעזרת ביט סימן

הביט האחרון a_{n-1} של המספר מייצג את המספר שלו, ע'פ :

$$\text{Sign} = \begin{cases} \text{Positive} & 0 \\ \text{Negative} & 1 \end{cases}$$

הצרוף $a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ מייצג את המספר

$$N = (-1)^{a_{n-1}} \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

דוגמאות

1. $0\ 0010110 = 22$
2. $1\ 0101110 = -46$
3.

	Number	Number with sign converted into a sign	Result using sign bit
	001011	+01011	
+	100110	−00110	
	$\rightarrow$	+00101	$\rightarrow$ 000101
	001011	+01011	
+	110110	−10110	
	$\rightarrow$	−01011	$\rightarrow$ 101011
	001011	+01011	
−	001001	−01001	
	$\rightarrow$	+00010	$\rightarrow$ 000010

<u>טווח היצוג</u> $+(2^{n-1}-1)\ ,\ \ldots\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ -1\ ,\ \ldots\ ,\ -(2^{n-1}-1)$.

<u>תכונות</u>

- קל למימוש.
- סבוך בפעולות חשבון.
- יצוג כפול לאפס - $+0 = 000\ldots0\ ,\ -0 = 100\ldots0$.

3.2 משלים ל - 1

<u>הגדרה</u> הספרה המשלימה r' של הספרה r בבסיס b היא $r' = b - r - 1$.
<u>הגדרה</u> המשלים ל-1 של מספר N בבסיס 2 הינו $2^n - N - 1$ ומתקבל ע'י השלמת כל ביט בנפרד (היפוך הביטים $1 \leftrightarrow 0$).
כלומר, הביט האחרון a_{n-1} של המספר מייצג את הסימן שלו, אם $a_{n-1} = 0$ זהו מספר חיובי שערכו נקבע ע'פ שאר הביטים ואם $a_{n-1} = -1$ זהו מספר שלילי שערכו הינו המשלים של שאר הביטים.
<u>סמניטקה</u> הצרוף $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0$ מייצג את המספר

$$N = -a_{n-1}(2^{n-1}-1) + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

חיבור בעזרת משלים ל- 1

1. חבר את שני המספרים.
2. אם יש נשא (הנקרא נשא מעגלי) מחק אותו, והוסף 1 לתוצאה (ואז התוצאה חיובית, אחרת התוצאה שלילית).

דוגמאות

1. $00010110 = 22$
2. $10101110 = -81$
3. $9 - 4 = (+9) + (-4) = 5$

$$\begin{array}{rr} & 01001 \\ + & 11011 \\ \hline & 100100 \\ + & \longrightarrow 1 \\ \hline & 00101 \end{array}$$

4. $(-5) - 6 = (-5) + (-6) = -11$

$$\begin{array}{rr} & 11010 \\ + & 11001 \\ \hline & 110011 \\ + & \longrightarrow 1 \\ \hline & 10100 \end{array}$$

נכונות

נניח נתונים שני מספרים x,y חיוביים בעלי n ביטים. נחלק לשלושה מקרים :

1. $x + y$ כרגיל.
2.

$$\begin{aligned} x - y &= x + (-y) \\ &= x + (2^n - y - 1) \\ &= 2^n - 1 + (x - y) \end{aligned}$$

המספר 2^n הינו ביט הנשא, אותו מוחקים ומוסיפים לתוצאה כדי לבטל את המחובר -1.

3.

$$\begin{aligned} -x - y &= (-x) + (-y) \\ &= (2^n - x - 1) + (2^n - y - 1) \\ &= 2^n - 1 + [2^n - 1 - (x + y)] \end{aligned}$$

כמקודם, המספר 2^n הינו ביט הנשא, אותו מוחקים ומוסיפים לתוצאה כדי לבטל את המחובר -1 ולכן נקבל $2^n - 1 - (x + y)$ שזה בדיוק $-(x + y)$ ע'פ משלים ל-1.

הערה - overflow אם תוצאת החיבור/חיסור של שני מספרים אינה ניתנת ליצוג ע'י מספר הביטים שנקבע, סימן התוצאה יהיה הפוך לסימני שני המספרים (מצב זה יתכן רק אם שני המספרים שווי סימן). לדוגמא $11 + 13 = 24$ ובבסיס 2 ע'י מספרים המיוצגים ב-5 ביטים ובשיטת משלים ל- 1 :

$$\begin{array}{rl} & 01011 \\ + & 01101 \\ \hline & 11000 \ = (-7)_{10} \end{array}$$

יש להבדיל בין carry לבין overflow, הראשון הינו חלק מאלגוריתם החיבור והשני מסמן כי תוצאת הפעולה אינה בטווח היצוג.

טווח היצוג $+(2^{n-1}-1)\ ,\ \ldots\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ -(2^{n-1}-1)$.

תכונות

- פעולות חשבון פשוטות.
- יצוג כפול לאפס - $+0 = 000\ldots0\ ,\ -0 = 111\ldots1$.
- המשלים של המשלים של מספר שווה למספר עצמו.

3.3 משלים ל - 2

הגדרה המשלים ל-2 של מספר N בבסיס 2 הינו $2^n - N$ ומתקבל חיבור ע'י הוספת אחד למשלים ל-1 של N.

כלומר, הביט האחרון a_{n-1} של המספר מייצג את הסימן שלו, אם $a_{n-1} = 0$ זהו מספר חיובי שערכו נקבע ע'פ שאר הביטים ואם $a_{n-1} = -1$ זהו מספר שלילי שערכו הינו המשלים של שאר הביטים בתוספת 1.

סמניטקה הצרוף $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0$ מייצג את המספר

$$N = -a_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 2^i$$

חיבור בעזרת משלים ל- 2

1. חבר את שני המספרים.
2. אם יש נשא מחק אותו.

דוגמאות

1. $00010110 = 22$
2. $10101111 = -81$
3. $9 - 4 = (+9) + (-4) = 5$

$$\begin{array}{rr} & 01001 \\ + & 11100 \\ \hline & 100101 \\ & \downarrow \\ \hline & 00101 \end{array}$$

4. $(-5) - 6 = (-5) + (-6) = -11$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ + \quad 11010 \\ \hline 110101 \\ \downarrow \\ \hline 10101 \end{array}$$

<u>נכונות</u>
נניח נתונים שני מספרים y,x חיוביים בעלי n ביטים. נחלק לשלושה מקרים :

1. $x + y$ כרגיל.
2.

$$\begin{aligned} x - y &= x + (-y) \\ &= x + (2^n - y) \\ &= 2^n + (x - y) \end{aligned}$$

המספר 2^n הינו ביט הנשא אותו מוחקים.

3.

$$\begin{aligned} -x - y &= (-x) + (-y) \\ &= (2^n - x) + (2^n - y) \\ &= 2^n + [2^n - (x + y)] \end{aligned}$$

כמקודם, המספר 2^n הינו ביט הנשא, אותו מוחקים ולכן נקבל $2^n - (x + y)$ שזה בדיוק $-(x + y)$ ע'פ משלים ל-2.

<u>הערה - overflow</u> אם תוצאת החיבור/חיסור של שני מספרים אינה ניתנת ליצוג ע'י מספר הביטים שנקבע, סימן התוצאה יהיה הפוך לסימני שני המספרים (מצב זה יתכן רק אם שני המספרים שווי סימן). לדוגמא $11 + 13 = 24$ ובבסיס 2 ע'י מספרים המיוצגים ב-5 ביטים ובשיטת משלים ל- 2 :

$$\begin{array}{rl} 01011 & \\ + \quad 01101 & \\ \hline 11000 & = (-8)_{10} \end{array}$$

יש להבדיל בין carry לבין overflow, הראשון הינו חלק מאלגוריתם החיבור והשני מסמן כי תוצאת הפעולה אינה בטווח היצוג.
<u>טווח היצוג</u> $-(2^{n-1})\ ,\ \ldots\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ +(2^{n-1} - 1)$.
<u>תכונות</u>

- פעולות חשבון פשוטות יותר.
- יצוג בודד ל-0.
- המשלים של N בשיטה הוא $-N$ במובן שסכומם שווה לאפס.
- המשלים של המשלים של מספר שווה למספר עצמו.

השוואה בין משמעויות של אותם צרופים בינריים.

Binary code	Pure bonary	Sign and magnitude	Ones complement	Twos complement
000	0	0	0	0
001	1	1	1	1
010	2	2	2	2
011	3	3	3	3
100	4	-0	-3	-4
101	5	-1	-2	-3
110	6	-2	-1	-2
111	7	-3	-0	-1